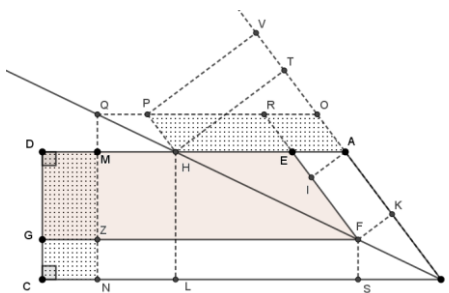
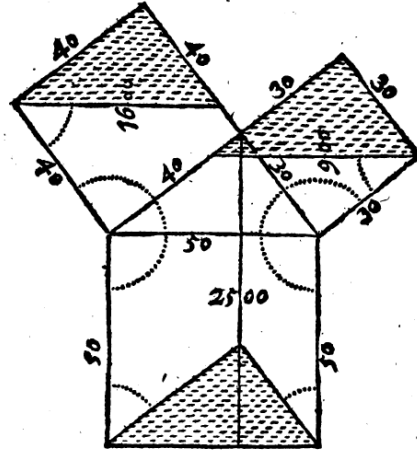


Sybrandt Hanfz. van Harlinghen,
Reeckenmeester tot Amsterdam.

100
geometrische
kwesties



nader bekeken

Fred Muijers

100 geometrische kwesties nader bekeken

Fred Muijrs

fm_pro@duct_2024

Voorwoord

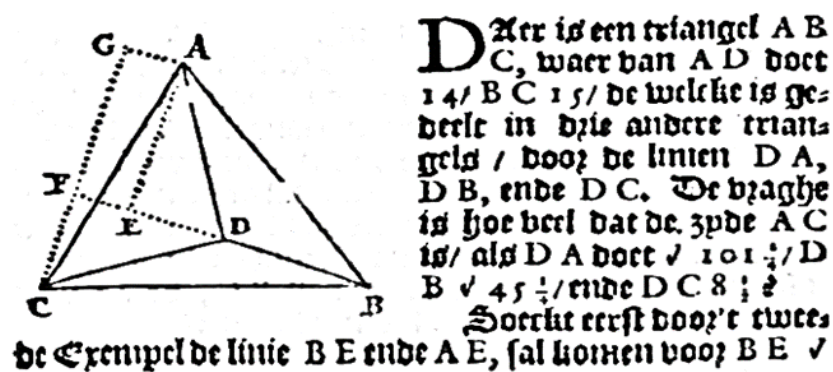
In 1614¹ wordt een boek gepubliceerd met de naam “*Hondert geometrische questien met hare solutien*”, geschreven door Sybrandt Hansz Cardinael (1578-1647). Dat is een verzameling meetkundige vraagstukken. Die ‘*questien*’ worden aangepakt met klassieke meetkundekennis, een fascinerende ervaring dat te lezen aangezien we tegenwoordig meestal snel over gaan op variabelen en vergelijkingen, een aanpak volgens de analytische meetkunde. Die laatste aanpak is uitgewerkt o.a. door Descartes (1596-1650) en komt in de 17^e eeuw sterk op maar in de oplossingen van deze verzameling vraagstukken is daarvan niets terug te vinden. Bekend is dat de grote wetenschapper Christiaan Huygens (1629-1695) enige vraagstukken kreeg als leerstof in zijn opleiding, die hij overigens op algebraïsche wijze oploste.

Het boek was uniek in zijn tijd door de combinatie van originaliteit, praktische toepasbaarheid en de veelheid aan onderwerpen.

Bron: Biografisch woordenboek van Nederlandse wiskundigen van M.Sitters.

<https://resources.huygens.knaw.nl/BWNW/lemmata/data/cardinaelsybrandt>

Er staan veel figuren in het boek en de tekst is in oud-Nederlands, gedrukt in een oud lettertype.



Voorbeeld: kwestie 23

De voorliggende tekst ‘hertaalt’ dit alles en stimuleert mogelijk het origineel te gaan bekijken.

Dat origineel is online beschikbaar. Zie

<https://lib.ugent.be/nl/catalog/rug01:001758905>

of scan de QR-code.

Veel plezier en met Cardinael sprekend:

‘*Vaert ter wylen wel.*’

Fred Muijers

Nijmegen

maart 2024

v2: met correcties, juli 2024



¹ Volgens DBNL. Het boek heeft geen jaartal.

Inhoud

Voorwoord.....	- 2 -
Inleiding.....	- 6 -
Q1 Hoogtelijn binnen driehoek 1	- 7 -
Q2 Hoogtelijn buiten driehoek.....	- 9 -
Q3 Zijden driehoek met verhoudingen 1	- 10 -
Q4 Middelevenredig 1	- 11 -
Q5 Middelevenredig 2.....	- 12 -
Q6 Afstand berekenen.....	- 13 -
Q7 Zijden driehoek berekenen 1	- 14 -
Q8 Hekwerkberekeningen.....	- 15 -
Q9 Hoogte van een toren 1	- 16 -
Q10 Zijden driehoek met verhoudingen 2	- 17 -
Q11 Rekenen aan een driehoek	- 18 -
Q12 Hoogte van een toren 2	- 19 -
Q13 Bissectrice in driehoek.....	- 20 -
Q14 Zijden driehoek berekenen 2	- 21 -
Q15 Zijden driehoek berekenen 3	- 22 -
Q16 Zijden driehoek berekenen 4	- 23 -
Q17 Hoogte van een toren 3	- 24 -
Q18 Zijden driehoek berekenen 5	- 25 -
Q19 Hoogtelijn binnen driehoek 2	- 27 -
Q20 Zwaartelijn in driehoek	- 28 -
Q21 Zijden driehoek met verhoudingen 3	- 29 -
Q22 Lijnstuk binnen driehoek 1.....	- 31 -
Q23 Zijden driehoek berekenen 6	- 32 -
Q24 Lijnstuk binnen driehoek 2.....	- 33 -
Q25 Middelevenredige 3	- 34 -
Q26 Lengtes buiten driehoek	- 36 -
Q27 Lengtes van ladders	- 37 -
Q28 Lengte van één ladder.....	- 39 -
Q29 Zijden driehoek berekenen 7	- 40 -
Q30 Berekening met hoogtelijnen	- 41 -
Q31 Zijden driehoek berekenen 8.....	- 42 -
Q32 Zijden driehoek berekenen 9.....	- 43 -
Q33 Zijden driehoek met verhoudingen 4	- 44 -

Q34 Zijden driehoek met verhoudingen 5	- 46 -
Q35 Middelvenredige 4	- 47 -
Q36 Soldaten tellen in vierhoek 1	- 48 -
Q37 Soldaten tellen in vierhoek 2	- 49 -
Q38 Oppervlakte van vierhoek.....	- 50 -
Q39 Oppervlakte veelhoek.....	- 51 -
Q40 Zijden rechthoek berekenen 1	- 52 -
Q41 Zijden rechthoek berekenen 2	- 53 -
Q42 Zijden rechthoek berekenen 3	- 54 -
Q43 Zijden rechthoek berekenen 4	- 55 -
Q44 Oppervlakte binnen oppervlakte.....	- 56 -
Q45 Zijden rechthoek berekenen 5	- 57 -
Q46 Zijden rechthoek berekenen 6	- 58 -
Q47 Berekening afmeting tuin	- 59 -
Q48 Berekening afmeting gracht.....	- 60 -
Q49 Soldaten tellen in vierhoek 3	- 61 -
Q50 Soldaten tellen in vierhoek 4	- 62 -
Q51 Soldaten tellen in vierhoek 5	- 63 -
Q52 Zijden rechthoek berekenen 7	- 64 -
Q53 Zijden rechthoek berekenen 8	- 65 -
Q54 Straal van cirkel 1	- 67 -
Q55 Oppervlakte bij cirkel 1	- 68 -
Q56 Straal van cirkel 2	- 69 -
Q57 Driehoek in cirkel 1	- 70 -
Q58 Cirkel in driehoek 1	- 72 -
Q59 Cirkel in driehoek 2	- 73 -
Q60 Vierkant in cirkel 1	- 74 -
Q61 Achthoek in cirkel	- 75 -
Q62 Vierkant in cirkel 2	- 76 -
Q63 Veelhoek in cirkel 1	- 78 -
Q64 Veelhoek in cirkel 2	- 79 -
Q65 Driehoek in cirkel 2	- 80 -
Q66 Driehoek in cirkel 3	- 81 -
Q67 Schutters in opstelling 1.....	- 83 -
Q68 Vierhoek in cirkel	- 84 -
Q69 Vijfhoek in cirkel.....	- 86 -

Q70 Zijde van parallellogram.....	- 88 -
Q71 Zijde van vierhoek 1.....	- 89 -
Q72 Diagonaal van vierhoek.....	- 90 -
Q73 Loodlijn in vierhoek 1.....	- 91 -
Q74 Loodlijn in vierhoek 2.....	- 92 -
Q75 Zijde van vierhoek 2.....	- 93 -
Q76 Schutters in opstelling 2.....	- 94 -
Q77 Driehoek in stukken delen 1.....	- 95 -
Q78 Trapezium in stukken delen 1.....	- 96 -
Q79 Trapezium in stukken delen 2.....	- 97 -
Q80 Trapezium in stukken delen 3.....	- 98 -
Q81 Rechthoek in stukken delen.....	- 99 -
Q82 Trapezium in stukken delen 4.....	- 100 -
Q83 Trapezium in stukken delen 5.....	- 102 -
Q84 Vierhoek in stukken delen 1.....	- 103 -
Q85 Vierhoek in stukken delen 2.....	- 106 -
Q86 Vierhoek in stukken delen 3.....	- 107 -
Q87 Aanpassing trapezium 1.....	- 108 -
Q88 Aanpassing trapezium 2.....	- 109 -
Q89 Vierkant binnen driehoek.....	- 110 -
Q90 Vierhoek in stukken delen 4.....	- 112 -
Q91 Zeshoek in stukken delen.....	- 113 -
Q92 Driehoek in stukken delen 2.....	- 115 -
Q93 Vierhoek in stukken delen 5.....	- 116 -
Q94 Aanpassing vierhoek.....	- 117 -
Q95 Vierhoek in stukken delen 6.....	- 118 -
Q96 Driehoek middels hoogtelijnen.....	- 120 -
Q97 Koordenvierhoek.....	- 121 -
Q98 Inhoud piramide 1.....	- 123 -
Q99 Inhoud piramide 2.....	- 124 -
Q100 Hoogte van een toren 4.....	- 126 -
Toegift.....	- 128 -
Nawoord.....	- 131 -
Bijlage.....	- 132 -

Inleiding

In deze tekst worden alle meetkundige problemen, *questien*, uit het boek van Cardinael beschreven en geregeld van een alternatieve vaak algebraïsche aanpak voorzien. In het oorspronkelijke boek wordt lengte en afstand soms gegeven in een eenheid, bijvoorbeeld 'voet' of 'roede'. Dat is in deze tekst niet gedaan maar kan natuurlijk wel erbij gedacht worden. Cardinael schrijft voor de lengte van een lijnstuk AB : '*AB doet 30 voet*'. In deze tekst wordt dit zo genoteerd: $|AB| = 30$.

De figuren zijn gemaakt met *GeoGebra*, maar af en toe is een kopie uit het boek geplaatst. Stippelfiguren en arceringen komen voor maar zijn soms vervangen door meer of minder donkere figuren. Hoekpunten van een driehoek of veelhoek zijn meestal met maar soms tegen de klokwijzerrichting in benoemd in het boek en dat is in deze tekst zoveel mogelijk overgenomen. Soms zijn lengtes van lijnstukken in de tekening geplaatst maar meestal niet. De hoekmarkering voor een rechte hoek komt nergens voor maar is in deze tekst af en toe wel gedaan.

Elk probleem in deze tekst is voorzien in de titel van een typering, de kern van de vraagstelling. Dat is in het boek niet gedaan. In het boek zijn ook alle problemen achter elkaar 'geplakt'. In deze tekst begint elk probleem op een nieuwe pagina.

Soms kwam schrijver dezes in de oorspronkelijke tekst fouten tegen, maar dat zijn vrijwel zeker zetfouten en ze zijn zelden storend.

De schrijver Cardinael noemt zijn problemen '*... seer dienstigh allen den ghenen die haer inde conste der Geometrie begheeren te oeffenen...*'. Dat betreft in veel van zijn problemen het gebruik van meetkundige stellingen, proposities, genoemd in de Elementen van Euclides.

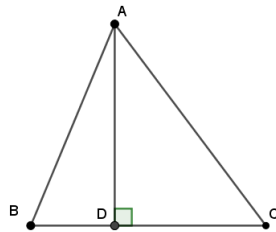
Soms komt de oplossing via een verrassende route en dat meldt Cardinael ook in zijn '*voorreden*', zie de bijlage: '*...om allerleye metinghen seer constichlijck [kunstig] te doen, en onbekende verborghen linien cortelijck ende behendelijck te vinden...*'. Hij ziet het boek als een leerboek, want geregeld verwijst hij terug naar een eerdere '*questie soo die gheleert is*'.

Als men bedenkt dat de vele berekeningen handmatig gaan met grote breuken en wortels daarvan, dan kan men enkel groot ontzag hebben voor rekenmeester Cardinael, gezien vanuit onze tijd.

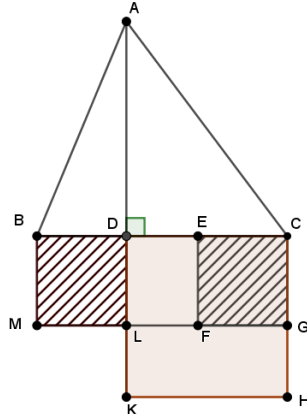
Verwijzing naar '*Hondert geometrische questien ...*' gebeurt in deze tekst met de afkorting HGQ.

Q1 Hoogtelijn binnen driehoek 1

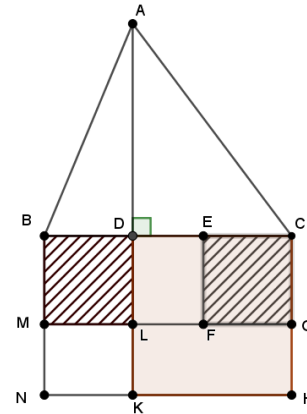
In figuur 1 is een driehoek ABC gegeven met de volgende lengtes voor de zijden: $|AB| = 13$, $|AC| = 15$, $|BC| = 14$. De vraag is hoe lang de hoogtelijn AD zal zijn.



Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3

De aanpak maakt gebruik van propositie 47 uit boek I van Euclides: de stelling van Pythagoras.

$$|AB|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |CD|^2 = |AD|^2.$$

$$\text{Hieruit volgt: } |CD|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = 15^2 - 13^2 = 56. [1]$$

In figuur 2 zijn vierkanten bij CD en BD getekend en is een vierkant van dezelfde grootte als bij BD bij punt C getekend. Er blijft dan een soort winkelhaak, *gnomon*, $DEFGHKD$ over met oppervlakte 56.

Merk op dat rechthoek $NHGM$ in figuur 3² dezelfde oppervlakte heeft want rechthoek $DEFL$ is even groot als rechthoek $MLKN$. En dit volgt uit het feit dat rechthoek $DCGL$ even groot is als rechthoek $BDKN$, zie de zijden, waarvan gelijke vierkanten zijn verwijderd.

$$\text{Hieruit volgt: } |MN| = \text{opp}(NHGM)/|NH|. \text{ Dus: } |MN| = \frac{56}{14} = 4. [2]$$

$$\text{En omdat } |MN| = |DE| \text{ volgt: } |BD| = \frac{|BC| - |DE|}{2} = 5. [3]$$

$$\text{Met Pythagoras in } \triangle ABD \text{ volgt: } |AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2 = 144.$$

$$\text{Dus: } |AD| = 12. [4]$$

Gevonden is nu '...soo men begheert...'

Anders:³

Er wordt weer gebruik gemaakt van de stelling van Pythagoras. En er hoort weer een figuur bij in de stijl van figuur 3 hierboven.

$$\text{Enerzijds geldt: } |BD|^2 = |AB|^2 - |AD|^2 = |AB|^2 - (|AC|^2 - |CD|^2) = |AB|^2 + |CD|^2 - |AC|^2.$$

$$\text{En ook: } |CD|^2 = (|BC| - |BD|)^2 = |BC|^2 - 2 * |BC| * |BD| + |BD|^2.$$

Als dit ingevuld wordt in de vorige regel volgt:

$$|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - 2 * |BC| * |BD| + |BD|^2.$$

$$\text{Dus: } |BD| = \frac{|AB|^2 + |BC|^2 - |AC|^2}{2 * |BC|} = \frac{169 + 196 - 225}{2 * 14} = 5.$$

En met deze lengte is vervolgens $|AD|$ te berekenen.

² In HGQ wordt alleen deze figuur gegeven: het is dus meteen een analysefiguur.

³ Andere aanpakken worden in HGQ zo aangekondigd en genoemd.

Opmerking 1:

De eerste aanpak laat zich veralgemeniseren.

Noem $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$. ($b > c$).

Er volgt:

$$[1] |CD|^2 - |BD|^2 = |AC|^2 - |AB|^2 = b^2 - c^2.$$

$$[2] |MN| = \frac{(b^2 - c^2)}{a}.$$

$$[3] |MN| = |DE| \text{ dus: } |BD| = \frac{|BC| - |DE|}{2} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{b^2 - c^2}{a} \right) = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$$

$$[4] |AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2.$$

$$\text{Dus: } |AD| = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \right)^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}.$$

Die laatste uitdrukking kan verder uitgeschreven worden en met $(a + b + c) = 2s$ volgt:

$$|AD| * 2a = \sqrt{16s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\text{En daarmee: } \text{Opp}(\Delta ABC) = \frac{1}{2} a * |AD| = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dit is de formule van Heron (10-70 AD) voor de oppervlakte van een driehoek bij gegeven zijden.

Opmerking 2:

Nu zouden we de hoogtelijn berekenen met trigonometrie. Met de cosinus-regel wordt eerst hoek B berekend en vervolgens met de sinus van die hoek de hoogtelijn. Of met de formule van Heron natuurlijk...

Met analytische meetkunde zou een aanpak zijn zoals bij opmerking 1.

Noem $|BD| = p$, $|AD| = h$. Er volgt: $h^2 = c^2 - p^2 = b^2 - (a - p)^2$. Dus $p = \dots$ Etc.

Opmerking 3:

Opmerkelijk is dat in het voorbeeld begonnen wordt met geheeltallige zijden en de resultaten ook geheeltallig zijn. Dat vergt enig denken vooraf!

Een methode om geheeltallige Pythagoreïsche drietallen te krijgen is de volgende:

Geef één rechthoekszijde lengte $2pq$ met $p, q \in \mathbb{N}$ en $p > q$. Met de andere rechthoekszijde met lengte $(p^2 - q^2)$ volgt een hypotenusa met lengte $(p^2 + q^2)$. Dat is eenvoudig na te gaan.

Een voorbeeld om dit te illustreren.

We willen een hoogtelijn van lengte 12.

Kies $2pq = 12$. Dat kan voor $p = 3, q = 2$.

Daar horen dan zijden van lengte 5 en lengte 13 bij, dus drietal (5,12,13): zie ΔABD .

Kiezen we $2pq = 4$, dan kan dat voor $p = 2, q = 1$.

Daar horen dan zijden van lengte 3 en lengte 5 bij.

Maak alle zijden een factor 3 groter en we hebben drietal (9,12,15): zie ΔADC .

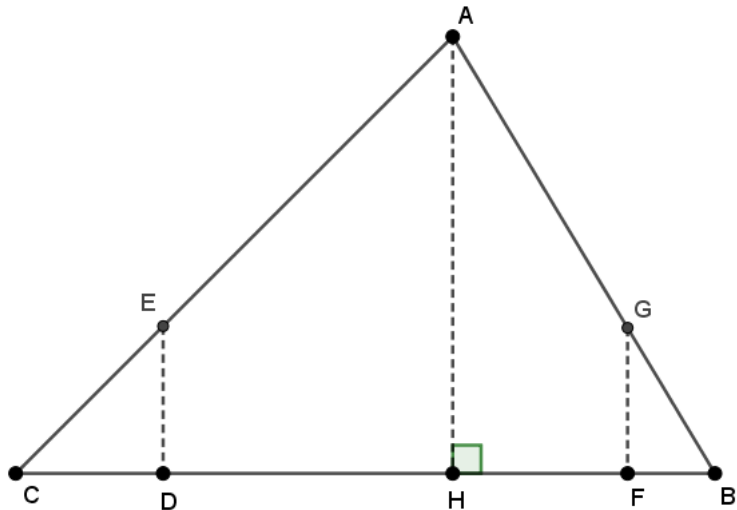
Voor een hoogtelijn van lengte 12 kunnen we ook kiezen: $p = 6, q = 1$.

Dan ontstaat een driehoek met als zijden drietal (12,35,37).

Die is erg 'scherp' en niet handig om in een boek af te beelden...

Q3 Zijden driehoek met verhoudingen 1

In figuur 1 is een driehoekig stuk land ABC gegeven. De lijnen AH , DE en FG staan loodrecht op BC . Gemeten zijn: $|HB| = 50$, $|FB| = 5$, $|FG| = 12$, $|CD| = 12$, $|DE| = 9$. Gevraagd zijn de lengtes van de zijden van $\triangle ABC$.



Figuur 1

FG is evenwijdig aan HA en uit evenredigheid (NB: dat wordt niet aangegeven) volgt nu: $|BF|:|BH| = |FG|:|HA|$. HB is 10 maal groter dan BF dus HA is 10 maal groter dan FG . Gevolg: $|HA| = 120$.

Analoog geldt: $|HA|:|DE| = |CH|:|CD|$. Dus: $|CH| = \frac{120 \cdot 12}{9} = 160$. [1]

Nu volgt: $|BC| = 160 + 50 = 210$.

Met de stelling van Pythagoras volgt:

$$|AB|^2 = 50^2 + 120^2 = 16900, \text{ dus: } |AB| = 130.$$

$$|AC|^2 = 160^2 + 120^2 = 40000, \text{ dus } |AC| = 200.$$

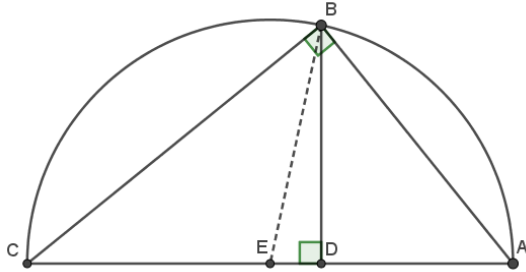
Opmerking:

Als voor de zijden van $\triangle BFG$ een Pythagoreïsch drietal gekozen wordt, dan is de lengte HB willekeurig als een geheel veelvoud (k) van $|BF|$ te kiezen. Daar zit enige vrijheid.

Maar om bij [1] weer een geheel getal te krijgen, moet de deling opgaan. In bovenstaand voorbeeld, dus bij deze (tangens van) hoeken bij B en C , gaat het voor elke keuze van k goed.

Q4 Middelevenredig 1

In figuur 1 geldt in $\triangle ABC$: hoek B is recht, BD staat loodrecht op AC , $|AD| = 18$, $|CD| = 32$.
Gevraagd: $|BD|$.



Figuur 1

$$|AC| = 50.$$

B ligt op de cirkel met middellijn AC met middelpunt E .

[Stelling van Thales, niet genoemd in HGQ].

$$\text{Dus: } |BE| = 25.$$

$$\text{En: } |DE| = 25 - 18 = 7.$$

Met de stelling van Pythagoras volgt:

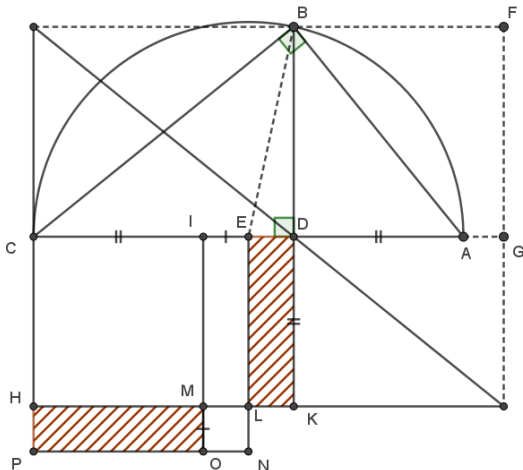
$$|BD|^2 = |BE|^2 - |DE|^2 = 576.$$

$$\text{Dus: } |BD| = 24.$$

Anders:

Er geldt: $|AD| : |BD| = |BD| : |CD|$. En dan volgt: $|BD|^2 = |AD| * |CD| = 576$, $|BD| = 24$.

Om dit te bewijzen wordt figuur 2 gebruikt.



Figuur 2

Neem punten M en I zodanig dat rechthoeken $EDKL$ en $IELM$ even groot zijn. Maak onder vierkant $CIMH$ ook een even grote rechthoek.

$MLNO$ is dan een vierkant en $CENP$ ook.

Rechthoek $CDKH$ is nu even groot als dat vierkant $CENP$ zonder vierkant $MLNO$.

Dus:

$$|CD| * |DK| = |CE|^2 - |ML|^2.$$

En hieruit ook:

$$|CD| * |AD| = |BE|^2 - |DE|^2.$$

Dit rechterdeel is ook gelijk aan $|BD|^2$.

Dus:

$$|CD| * |AD| = |BD|^2 \text{ en dit was te bewijzen.}$$

Anders:

$$|CD| : |AD| = 32 : 18. \text{ De 'minimale proportie' geeft dan: } |CD| = \frac{16}{9} |AD|.$$

$$\text{En uit } |AD| : |BD| = |BD| : |CD| \text{ volgt: } |BD| = \sqrt{\frac{16}{9}} * |AD| = \frac{4}{3} * 18 = 24.$$

Opmerking:

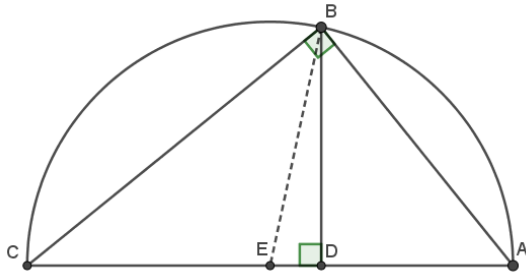
De laatste aanpak maakt gebruik van de gelijkvormigheid van $\triangle BDA$ en $\triangle CDB$. In Euclides, propositie 13, boek VI komt deze kwestie ook voor.

Lijnstuk BD heet 'de middelevenredige tussen' of 'het meetkundig gemiddelde van' de lijnstukken DA en DC .

In HGQ komt de term 'gelijkvormig' niet voor. Cardinael gebruikt: figuren of lijnstukken zijn 'in proportie'. Dit is dan te lezen als 'in verhouding'.

Q5 Middelevenredig 2

In figuur 1 geldt in $\triangle ABC$: hoek B is recht, BD staat loodrecht op AC , $|AC| = 50$, $|BD| = 24$.
 Gevraagd: $|AD|$, $|CD|$.



Figuur 1

$$|AC| = 50.$$

B ligt op de cirkel met middellijn AC met middelpunt E .

$$\text{Dus: } |BE| = 25.$$

Met Pythagoras in $\triangle BED$ volgt:

$$|DE|^2 = |BE|^2 - |BD|^2 = 625 - 576 = 49.$$

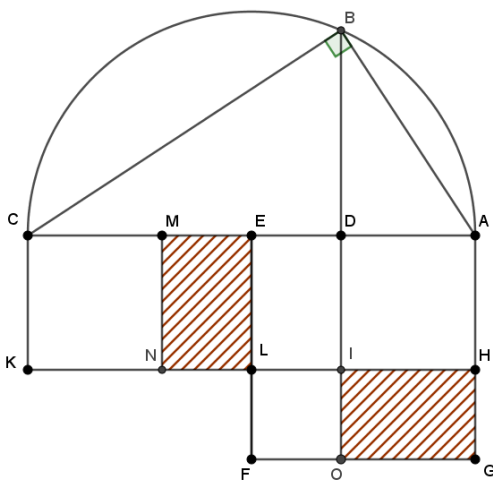
$$\text{Dus: } |DE| = 7.$$

En daarmee volgt:

$$|AD| = 25 - 7 = 18, |CD| = 25 + 7 = 32.$$

Anders:

Zie figuur 2.



Figuur 2

Maak vierkant $DAHI$ en rechthoek $CAHK$.

$$\text{Opp}(CDIK) = |CD| * |AD| = |BD|^2 = 576.$$

Maak vierkant $EAGF$ met zijde 25.

$$\text{Opp}(EAGF) = 625.$$

E is het midden van AC en rechthoek $MELN$ is even groot als rechthoek $EDIL$. Het *gnomon* $AGOILEA$ is even groot als $CELK$ en $EDIL$ samen: 576.

De rechthoeken $DELI$ en $IHGO$ zijn ook even groot. Er resteert vierkant $LIOF$.

$$\text{Opp}(LIOF) = \text{Opp}(EAGF) - \text{Opp}(\text{gnomon}).$$

$$\text{Dus: } \text{Opp}(LIOF) = 625 - 576 = 49.$$

$$\text{Dus: } |ED| = (FO =) 7.$$

En daarmee volgt:

$$|AD| = 25 - 7 = 18, |CD| = 25 + 7 = 32.$$

Opmerking:

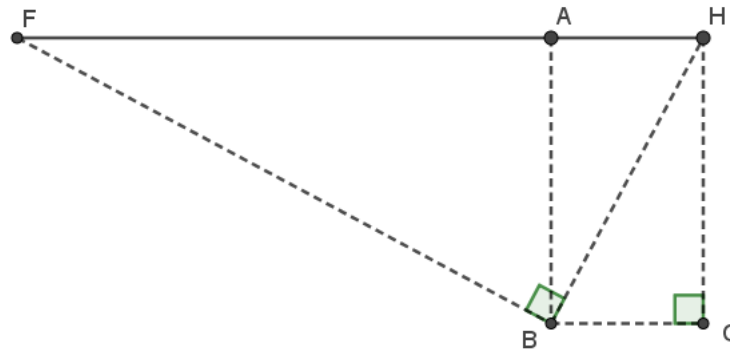
De tweede aanpak gebruikt propositie 5, boek II, Euclides. (ref. Sitters, 2008)

Q6 Afstand berekenen

Zie figuur 1.

Er zijn twee steden H en F en op de lijn daartussen ligt een punt A . Loodrecht vanaf A is een punt B gemeten op een afstand van 500 [roeden] zodanig dat hoek HBF recht is. Loodrecht vanaf B is een punt C gemeten op afstand 200 zodanig dat hoek BCH recht is.

De vraag is de afstand tussen H en F te bepalen.



Figuur 1

Omdat $|AF| : |AB| = |AB| : |AH|$ volgt:

$$|AF| * |AH| = |AB|^2 \text{ dus } |AF| * 200 = 250000.$$

Dus: $|AF| = 1250$.

En: $|HF| = |AF| + |AH| = 1450$ [roeden].

Opmerking:

De roede is een oude lengtemaat en een oude oppervlaktemaat, die van plaats tot plaats verschilde. Een roede bestond uit een aantal voeten, variërend van 7 tot 21. Voor het meten van lange afstanden was de Rijnlandse roede van 3,767 m het meest gebruikelijk. [Bron: Wikipedia.]

Als dat ook hier van toepassing is, dan is de afstand van A naar B dus ruim 1,8 km.

AB moet loodrecht zijn vanuit A over deze afstand. Dat lijkt lastig meten zelfs in de polder: met meetlat of stappen tellen is dat vrijwel niet te doen.

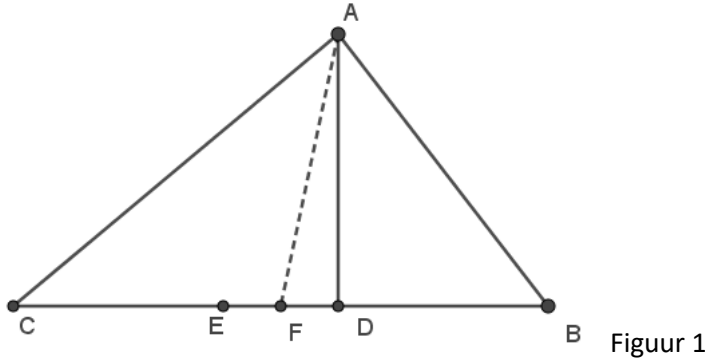
Toch staat er *'...hebbe ick winckelrecht [...] ghemeten tot in B...'* en bedoeld is vanuit A .

Het is dus meer een schets hoe dat te doen.

Hoe het ook zij, het is bedoeld als een berekening voor de praktijk.

Q7 Zijden driehoek berekenen 1

Driehoek ABC is rechthoekig in A . Voor de hoogtelijn AD geldt: $|AD| = 24$.
Verder geldt er ook: $|CD| = |BD| + 14$. Zie figuur 1.
Gevraagd zijn de zijden van de driehoek te berekenen.



Maak E zo dat $|CE| = |BD|$.

Dan geldt: $|DE| = 14$.

Met F het midden van DE en dan ook het midden van BC volgt: $|DF| = 7$.

Er volgt: $|AF|^2 = |AD|^2 + |DF|^2 = 625$ dus $|AF| = 25$.

En dan ook: $|BF| = |CF| = 25$.

$|BD| = |BF| - |DF| = 18$ en $|CD| = |CF| + |DF| = 32$.

Met de Stelling van Pythagoras volgt nu: $|AB| = 30$, $|AC| = 40$.

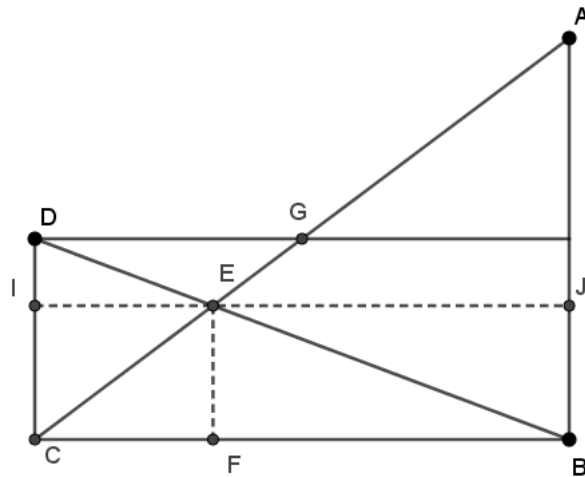
Opmerking:

Geen nieuwe lengtes hier omdat Cardinael blijkbaar graag geheeltallig wil werken.

De hier gebruikte lengtes komen ook voor bij Q4 en Q5.

Q8 Hekwerkberekeningen

Een boer heeft een hek laten maken als in figuur 1. Gegeven zijn: $|AB| = 9$, $|BC| = 10$, $|CD| = 6$ [voet]. Gevraagd: $|EA|$, $|EB|$, $|EC|$, $|ED|$, $|EF|$ en $|GD|$.



Figuur 1

Er geldt: $|IE| : |EJ| = |CD| : |AB|$ (niet genoemd maar klopt t.g.v. gelijkvormigheid $\triangle DEC$ en $\triangle BEA$).

Dan ook: $|CF| : |FB| = |CD| : |AB|$.

En: $|CF| : (|CF| + |FB|) = |CD| : (|CD| + |AB|)$. [1]

Er volgt: $|CF| = \frac{6}{15} * 10 = 4$. En dus: $|BF| = 6$.

Er geldt: $|EF| : |AB| = |CF| : |BC|$. Dus: $|EF| = \frac{4}{10} * 9 = 3\frac{3}{5}$.

Met de Stelling van Pythagoras volgt:

$$|EC| = \sqrt{28\frac{24}{25}}, |EB| = \sqrt{48\frac{24}{25}}, |ED| = \sqrt{21\frac{19}{25}}, |EA| = \sqrt{65\frac{4}{25}}. [2]$$

Uit gelijkvormigheid volgt: $|ED| : |EB| = |GD| : |BC|$ en daarmee volgt: $|GD| = \sqrt{44\frac{4}{9}}$.

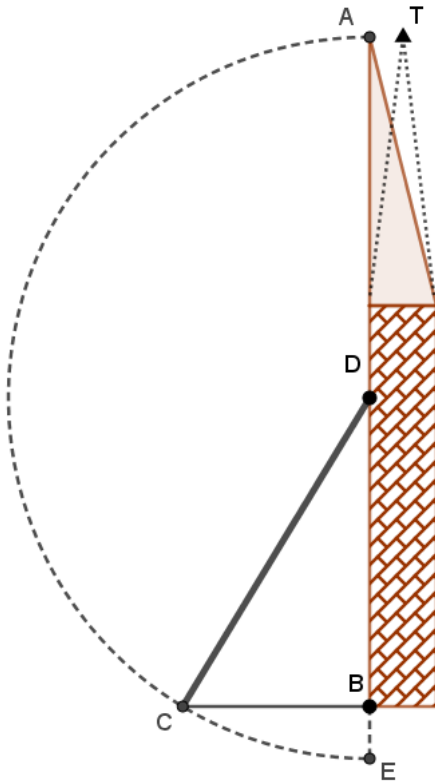
Opmerkingen:

[1] Dit volgt uit: als $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ dan $\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c+d}$ en daaruit $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$. Zie propositie 12, boek VII, Euclides.

[2] Dit wordt niet verder vereenvoudigd.

Q9 Hoogte van een toren 1

Gegeven is een toren met hoogte 75 [voet]. Daar staat een ladder CD tegen, waarbij D een venster is en C op afstand 15 van het voetpunt van de toren ligt. Zie figuur 1. Er geldt: $|AD| = |CD|$.
Gevraagd is $|BD|$ en de lengte van de ladder, dus $|CD|$, te berekenen.



Figuur 1

$|BC|^2 = 225 = |BE| * |AB|$.
[Volgt uit Q4 maar wordt in HGQ niet vermeld.]

$$\text{Dus: } |BE| = \frac{225}{75} = 3.$$

Er volgt: $|AE| = 75 + 3 = 78$.

Dus: $|AD| = 39$.

En dat is ook de lengte van de ladder.

Het venster D zit op hoogte:

$$|BD| = 39 - 3 = 36.$$

Opmerking:

In HGQ staat een 'reële' toren getekend met venster, ladder en 3D-suggestie van de toren.

Punt A wordt daar ook echt als spitspunt gezien, in HGQ de top met een wimpel daarop, en dus gelegen boven het midden van het grondvlak van de toren. In een zijaanzicht zou dan ook punt T in figuur 1 gebruikt moeten worden.

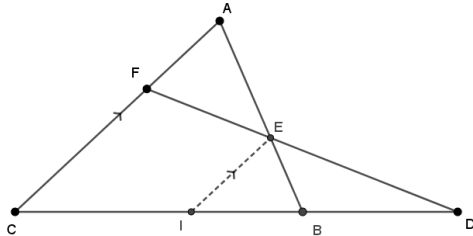
Echter, dan is D niet gelegen op de lijn BT en gaat het redenering hierboven niet op want de lijn $T - D - E$ is dan geen middellijn van de cirkel met middelpunt D .

De schets in HGQ is mogelijk bedoeld om een idee te geven hoe zo iets te berekenen.

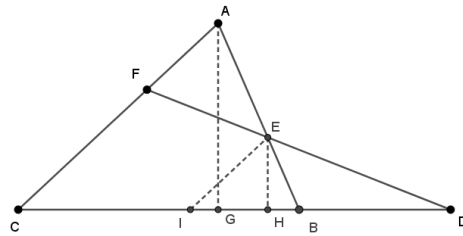
Het probleem is gesteld als een redactiesom zonder op echte reële details te letten: de ladder is even lang als de afstand venster tot de spits...tja.

Q10 Zijden driehoek met verhoudingen 2

Zie figuur 1. Driehoek ABC is gegeven met op verlengde van BC punt D . Een lijn door D snijdt de driehoek in de punten E en F . Er geldt: $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$, $|BD| = 10$, $|BE| = 5$.
Gevraagd: $|AF|$, $|FC|$.



Figuur 1



Figuur 2

$\triangle EBI$ is gelijkvormig met ('van gelijke proportie als') $\triangle ABC$. Dan volgt: $|BI| : |BC| = |BE| : |BA|$.

Dus: $|BI| = \frac{5}{13} * 14 = 5 \frac{5}{13}$.

Ook volgt: $|EI| : |AC| = |BE| : |BA|$. Dus: $|EI| = \frac{5}{13} * 15 = 5 \frac{10}{13}$.

$\triangle DEI$ is gelijkvormig aan $\triangle DFC$. We hebben: $|DI| = 15 \frac{5}{13}$, $|DC| = 24$.

Er geldt: $|FC| : |EI| = |DC| : |DI|$. Dus: $|FC| = \frac{24}{15 \frac{5}{13}} * 5 \frac{10}{13} = 9$ en $|AF| = 6$.

En men kan ook zo eenvoudig ('lichtelijcken') vinden de lengte van DE en EF . [1]

Opmerking 1:

Figuur 2 is het gepresenteerde plaatje in HGQ. De hulplijnen EH en AG zijn er bij getekend.

[1] Er is nog wel wat te doen hiervoor.

Lengte hoogtelijn $|AG|$ gaat met de aanpak van Q1. Dan met de Stelling van Pythagoras: $|BG|$.

Met $|EH| : |AG| = |BE| : |BA|$ is $|EH|$ te berekenen en met Pythagoras dan weer $|HB|$.

Nu $|HD|$ en $|EH|$ bekend zijn, is met Pythagoras eindelijk $|DE|$ te berekenen.

Er volgt: $|AG| = 12$; $|BG| = 5$; $|EH| = 4 \frac{8}{13}$; $|HB| = 1 \frac{12}{13}$; $|DE| = \frac{1}{13} \sqrt{27625}$.

Veel gereken en dat laat Cardinael nu aan de actieve lezer over.

Er geldt verder: $|DF| : |DE| = |DI| : |DC|$. Daarmee is $|DF|$ te vinden, en dus ook $|EF|$. Tja...

Opmerking 2:

Menelaos (ca 100 AD) heeft een mooie stelling geformuleerd, waarmee het eerst gevraagde makkelijker te vinden is. Zie lijn DF als een transversaal van de driehoek.

Volgens die stelling geldt dan: $\frac{|CD|}{|DB|} * \frac{|BE|}{|EA|} * \frac{|AF|}{|FC|} = 1$.

Er volgt: $\frac{|AF|}{|FC|} = \frac{10}{24} * \frac{8}{5} = \frac{2}{3}$. Dus: $|AF| = \frac{2}{5} * 15 = 6$.

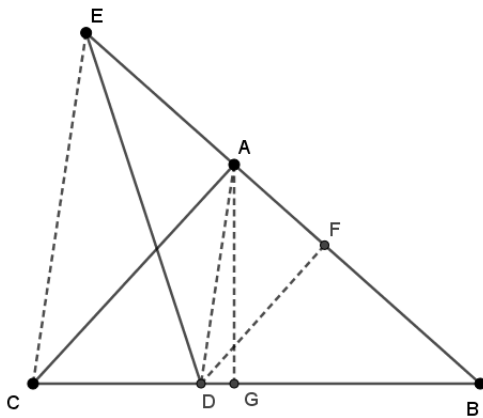
Cardinael kende die stelling vast wel.

Q11 Rekenen aan een driehoek

Zie figuur 1. Gegeven zijn: $|AB| = 26$, $|BC| = 30$, $|AC| = 28$. [1]

De oppervlakte van $\triangle BED$ is gelijk aan de oppervlakte van $\triangle ABC$ en $|BD| = 18$. [2]

Gevraagd: $|BE|$, $|ED|$.



Figuur 1

$Opp(\triangle AED) = opp(\triangle ACD)$.

Dit volgt uit [2]. [3]

De driehoeken hebben dezelfde basis AD dus zijn AD en EC evenwijdig. [4]

$\triangle ABD$ is gelijkvormig met $\triangle EBC$ en er volgt:

$|BE| : |AB| = |BC| : |BD|$.

Dus: $|BE| = \frac{30}{18} * 26 = 43\frac{1}{3}$.

Met Q1 is dan te vinden: $|BG| = 13\frac{1}{5}$. [5]

$\triangle BFD$ is gelijkvormig met $\triangle BGA$ en er volgt: $|BF| : |BD| = |BG| : |BA|$, dus: $|BF| = \frac{13\frac{1}{5}}{26} * 18 = 9\frac{9}{65}$.

Dus: $|FE| = |BE| - |BA| = 43\frac{1}{3} - 26 = 17\frac{2}{3}$. En: $|DF|^2 = |BD|^2 - |BF|^2 = 240\frac{2064}{4225}$.

Er volgt: $|DE|^2 = |FE|^2 + |DF|^2 = 1409\frac{1183}{1521}$.

$|ED| = \sqrt{1409\frac{1183}{1521}}$. [6]

Opmerkingen:

[1] Cardinael heeft eenvoudig het dubbele van de zijden uit Q10 genomen...

[2] In HGQ wordt het woord 'inhoudt' voor oppervlakte gebruikt.

[3] Van beide driehoeken bij [2] is de oppervlakte van $\triangle ADB$ afgetrokken.

[4] Dit volgt uit propositie 39, boek I, Euclides, maar dat wordt niet genoemd.

[5] Met Q1 is de lengte van de hoogtelijn te berekenen. Dat geeft: $|AG| = 22\frac{2}{5}$.

Met Pythagoras in $\triangle AGB$ is vervolgens $|BG|$ te berekenen.

[6] Opmerkelijk is dat deze uitdrukking blijft staan, terwijl de breuk nog te vereenvoudigen is:

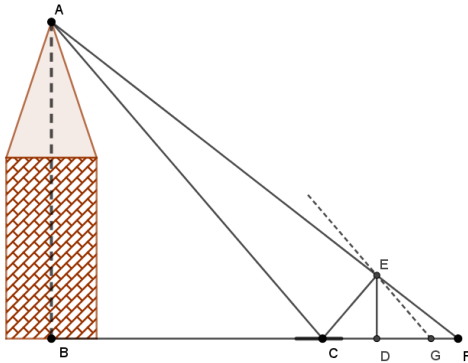
$\frac{1183}{1521} = \frac{7*169}{9*169} = \frac{7}{9}$. Hoe Cardinael aan die breuk komt, is niet meteen duidelijk, want: $|FE|^2 + |DF|^2 =$

$\left(34\frac{38}{195}\right)^2 + 240\frac{2064}{4225} = \frac{44462224}{3^2*65^2} + \frac{1016064}{65^2} = \frac{53606800}{9*4225} = \frac{12688}{9} = 1409\frac{7}{9}$.

Al met al veel gereken met (kwadraten van) breuken met grote tellers en noemers, bijzonder zo zonder rekenmachine.

Q12 Hoogte van een toren 2

Zie figuur 1, [1]. Er ligt een spiegel, bijvoorbeeld in C , om daarmee de hoogte van de toren te meten. In D , 'achterwaerts' vanuit C , met $|CD| = 8$ staat een stok DE , met $|DE| = 6$, zodat in punt E de top A in de spiegel is te zien. In F , verder 'achterwaerts' met $|DF| = 9$, is nu over punt E de top A te zien. Gevraagd: $|AB|$.



Figuur 1

Er geldt: $|GF| = |DF| - |CD| = 1$. [2]

EG is evenwijdig aan AC . Er volgt:

$|DG| : |ED| = |BC| : |AB|$.

Maar ook: $|CD| : |ED| = |BC| : |AB|$. [3]

Dus: $|DG| = |CD|$.

Omdat $\triangle EGF$ gelijkvormig is met $\triangle ACF$, volgt:

$|GF| : |ED| = |CF| : |AB|$.

$1 : 6 = 17 : |AB|$ en dus: $|AB| = 102$.

Opmerkingen:

[1] Punt B is nu wel in de figuur in HGQ in het midden van het grondvlak gedacht en punt A is daar dan loodrecht boven. Het zijaanzicht in de figuur hierboven is dus conform de figuur in HGQ . In HGQ is zo'n toren voorzien van een wimpel bovenop en A is daarvan dan de top.

[2] Dan zal dus moeten gelden: $|DG| = |CD|$.

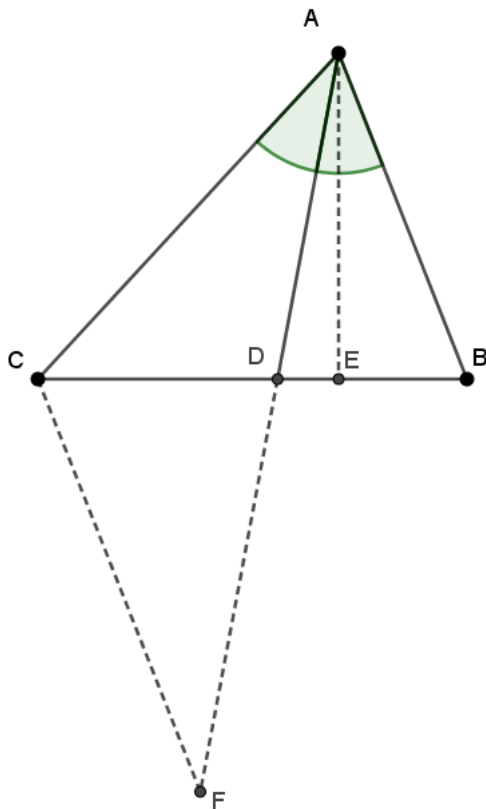
[3] Vanwege de spiegel geldt: *hoek* $BCA = \textit{hoek} DCE .$

Het probleem is weer gesteld als een redactiesom zonder op echte reële details te letten: vanuit F is over punt E spits A te zien, waarbij F een punt op de grond is...tja.

Q13 Bissectrice in driehoek

Zie figuur 1. $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$. De lijn AD is een bissectrice.

Gevraagd: $|AD|$.



Figuur 1

Lijn CF is evenwijdig aan lijn AB .

Dan geldt:

$\text{hoek } DFC = \text{hoek } DAC$. [1]

En er volgt: $|CF| = |AC|$.

Omdat $\triangle BDA$ gelijkvormig is met $\triangle CDF$ volgt:

$|CD|:|BD| = |CF|:|AB| = 13:15$. [2]

Dus:

$$|CD| = \frac{13}{28} * |BC| = 6\frac{1}{2}.$$

$$\text{En: } |BD| = \frac{15}{28} * |BC| = 7\frac{1}{2}.$$

Met Q1 is te vinden: $|AE| = 12$.

Met Pythagoras in $\triangle BAE$ volgt: $|BE| = 5$.

En daarmee: $|ED| = 1\frac{1}{2}$.

Met Pythagoras in $\triangle ADE$ volgt:

$$|AD| = \sqrt{146\frac{1}{4}}.$$

Opmerkingen 1:

[1] Gebruikt is de Z-hoek-eigenschap en AD is een bissectrice.

[2] Hier staat feitelijk het bewijs van de zogenaamde bissectricestelling.

Opmerking 2:

De lengte van een bissectrice is ook te berekenen zonder de hoogtelijn te kennen.

Met $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

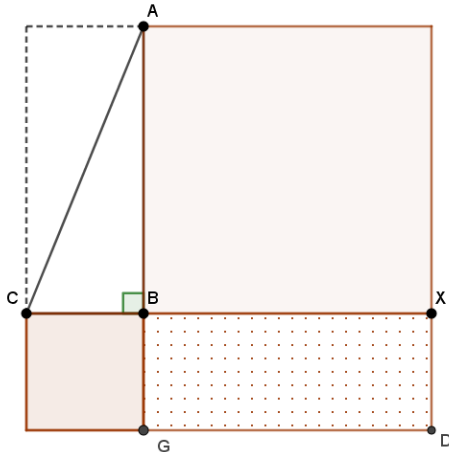
Met de cosinus-regel is de hoek bij A (α) te berekenen.

En dan met de sinus-regel: $\frac{|AD|}{\sin(\gamma)} = \frac{|CD|}{\sin(\frac{\alpha}{2})}$ met ingevuld: $\sin(\gamma) = \frac{c}{a} * \sin(\alpha)$.

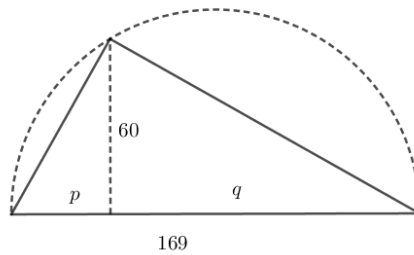
Dat geeft: $|AD| = |CD| * 2 * \frac{c}{a} * \cos(\frac{\alpha}{2})$.

Q14 Zijden driehoek berekenen 2

Zie figuur 1. [In HGQ heet X ook A .] Gegeven is: $|AB| + |BC| = 17$, $|AC| = 13$. Gevraagd: $|AB|$, $|BC|$.



Figuur 1



Figuur 2

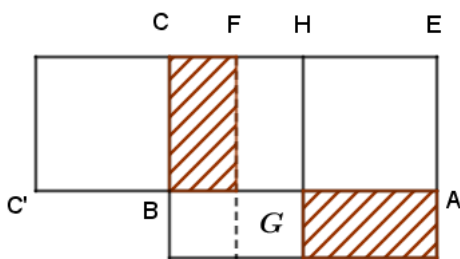
Het grote vierkant is gemaakt en daarvoor geldt: $(|AB| + |BC|)^2 = 17^2 = 289$.

Er geldt: $|BC|^2 + |AB|^2 = |AC|^2 = 169$.

Als van het grote vierkant de twee kleinere vierkanten worden afgetrokken blijven twee even grote rechthoeken over, elk met oppervlakte: $(289 - 169)/2 = 60$.

In figuur 2 is dit te zien, met de namen p en q voor $|BC|^2$ en $|AB|^2$. [In HGQ staan die letters er niet bij en is de cirkelboog niet getekend.] Lengte 60 is dan te zien als de middelevenredige van p en q .

Met Q5 is dan te berekenen: $p = 25$, $q = 144$. Dus: $|BC| = 5$, $|AB| = 12$.



Figuur 3

Met figuur 3 is een andere aanpak te zien.

$ABCE$ is een rechthoek als $DGDX$ dus met oppervlakte 60.

$$|AC'| = 17, |EF| = 8\frac{1}{2}.$$

Als van het vierkant bij FE ($opp = (8\frac{1}{2})^2 = 72\frac{1}{4}$) dan 60 wordt afgehaald, dan resteert een vierkantje hier geduid met de letter G , met oppervlakte $12\frac{1}{4}$.

$$\text{Dus: } |FH| = 3\frac{1}{2}.$$

$$\text{En: } |BC| = |AE| = |HE| = 8\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 5.$$

$$|AB| = |EC| = 8\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} = 12.$$

Opmerking:

Nu zou een aanpak met enige algebra wel handig zijn.

Noem $|BC| = x$, $|AB| = y$.

Er geldt dan: $x^2 + y^2 = 169$, $x + y = 17$.

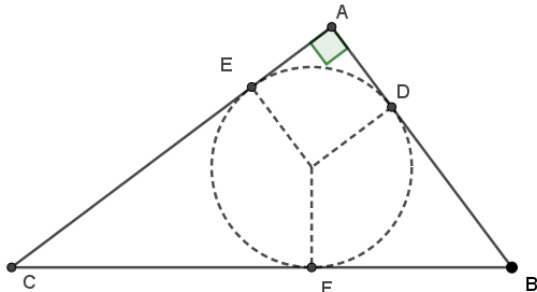
Dus: $x^2 + (17 - x)^2 = 169$.

En uitgewerkt: $x^2 - 17x + 60 = 0 = (x - 5)(x - 12)$.

Dus passend bij figuur 1: $|BC| = x = 5$.

Q15 Zijden driehoek berekenen 3

Zie figuur 1. Van de driehoek, rechthoekig in A , is de oppervlakte 600 en zijn de zijden samen 120.
Gevraagd: $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$.



Figuur 1

Met $2 * 600$ gedeeld door 120 volgt:
 $|AD| = |AE| = 10$. [1]
 Van 120 dan $2 * 10$ afgetrokken resteert voor $DBCE$ dus 100. [2] En dat geeft:
 $|BC| = 50$ en dus $|BD| + |EC|$ ook. [3]
 Er volgt: $|AC| + |AB| = 70$.

Met geleerde in Q14 volgt nu: [4]
 $\left(\frac{70}{2}\right)^2 - 1200 = 25$ [en dat is de oppervlakte van het vierkantje G , zie Q14].
 Dat geeft [als zijde] 5.
 Dus: $|AB| = 35 - 5 = 30$.
 En: $|AC| = 35 + 5 = 40$.

Opmerkingen 1:

[1] Hier wordt door de figuur gesuggereerd, dat Cardinael de straal (r) van de ingeschreven cirkel gebruikt en er geldt dan: $\frac{1}{2}r * |BC| + \frac{1}{2}r * |AC| + \frac{1}{2}r * |AB| = opp(\Delta ABC)$.

Daaruit volgt: $r = \frac{2*600}{120} = 10$. En bij A zit een vierkant dus ...

[2] Bedoeld is de lengte van de gebroken lijn $D - B - C - E$.

[3] Hier wordt gebruikt dat de raaklijnen vanuit B aan de cirkel even lang zijn. Ook de raaklijnen uit C aan de cirkel zijn even lang.

[4] Cardinael ziet HGQ als een leerboek en schrijft hier 'soo doet als in onze veerthiende exempel gheleert is'.

Opmerking 2:

Met enige algebra zou het zo kunnen gaan met $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$:

$$a^2 = b^2 + c^2; a + b + c = 120; \frac{1}{2}bc = 600.$$

$$\text{Er volgt: } (b + c)^2 = (120 - a)^2.$$

$$\text{En daaruit: } b^2 + c^2 = 14400 - 240a + a^2 - 2bc.$$

$$\text{En nu: } a^2 = 14400 - 240a + a^2 - 2400.$$

$$\text{Dus: } 240a = 12000.$$

$$\text{Dus: } a = 50.$$

$$\text{Met: } c = 120 - a - b = 70 - b.$$

$$\text{En: } bc = b(70 - b) = 1200.$$

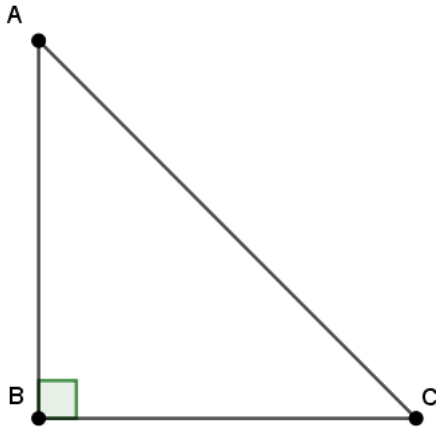
$$\text{Er volgt: } b^2 - 70b + 1200 = 0.$$

$$\text{Dus: } (b - 30)(b - 40) = 0.$$

$$\text{En passend bij figuur 1: } |AC| = b = 40.$$

Q16 Zijden driehoek berekenen 4

Zie figuur 1. De driehoek is rechthoekig in B . De som van de zijden is $4 + \sqrt{8}$.
En er geldt: $|AB| = |BC|$. Gevraagd: $|AB|$, $|BC|$, $|AC|$.



Figuur 1

Neem aan dat geldt:

$$|AB| = |BC| = 1.$$

Dan volgt:

$$|AC| = \sqrt{2}.$$

De som van de zijden zou dan zijn: $2 + \sqrt{2}$.

Nu geldt:

$$(2 + \sqrt{2}) : (4 + \sqrt{8}) = 1 : |AB|, \text{ of } |BC|.$$

Dus op basis van deze verhouding:

$$|AB| = 2 (= |BC|).$$

$$\text{En dus: } |AC| = \sqrt{8}.$$

Opmerking:

Een eenvoudige kwestie.

Met enige algebra zou volgen, met $|AB| = |BC| = a$:

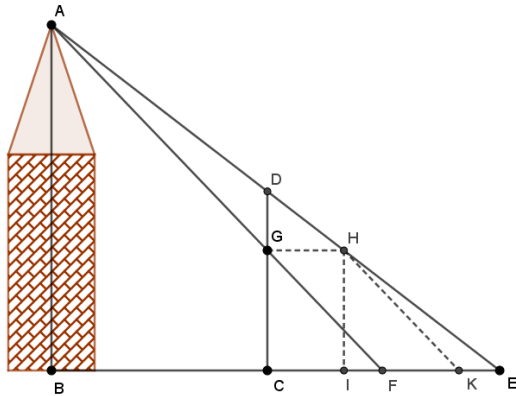
$$|AC| = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Dus: } 2a + a\sqrt{2} = a(2 + \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{8} = 2(2 + \sqrt{2}).$$

Er volgt: $a = 2$.

Q17 Hoogte van een toren 3

Zie figuur 1. Op een zekere plaats, bijvoorbeeld in C , staat een stok CD loodrecht. $|CD| = 20$. De (kijk-)lijn AD komt in punt E . $|EC| = 25$. Punt G ligt op de stok. $|DG| = 4$. Nu komt de lijn AG in punt F . $|FC| = 17$. Gevraagd: $|AB|$.



Figuur 1

$|GH| = 5$. [1]
Daarmee volgt:
 $|KE| = 3$. [2]
Er geldt:
 $|GC| = |HI| = 16$.

En daarmee volgt:
 $|AB| : |HI| = |KE| : |FE|$.
Dus: $|AB| = \left(\frac{3}{8} * 16 =\right) 42\frac{2}{3}$.

En nu ook te berekenen, indien gewenst:
 $|BE|$, $|AE|$, $|AF|$. [3]

Opmerkingen:

[1] Dit wordt zomaar geponeerd: de lezer mag ook wat doen, blijkbaar. Het volgt uit de gelijkvormigheid van $\triangle DGH$ met $\triangle DCE$.

Dus: $|GH| : |DG| = |CE| : |DC|$. En dus: $|GH| = \frac{25}{20} * 4$.

[2] $|KE| = (|CE| - |CF|) - |FK| = 25 - 17 - 5$.

Vierhoek $FKHG$ is een parallellogram.

[3] Wordt niet verder uitgewerkt maar is een opdracht aan de lezer.(?)

Er geldt: $|BE| : |CE| = |CD| : |AB|$. Daarmee is te vinden: $|BE| = 11\frac{23}{32}$.

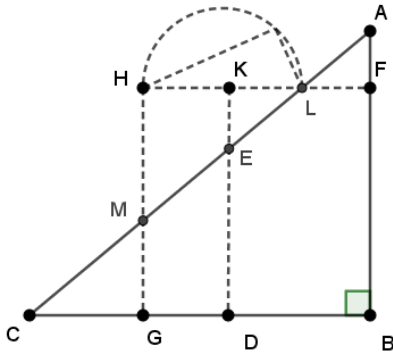
Voor de andere twee lengtes is vervolgens de stelling van Pythagoras te gebruiken.

Het praktische nut van $|BE|$ is duidelijk, maar van $|AE|$ en $|AF|$?

Ook het lengte van de stok geeft te denken. Als een voet ongeveer 30 cm is en er wordt een stok van 20 voet gebruikt, die is dus van lengte 6 meter. Het kan, maar toch...

Q18 Zijden driehoek berekenen 5

Zie figuur 1. De driehoek is rechthoekig in B. De oppervlakte van $\triangle CDE$ is 24. De oppervlakte van vierhoek $AEDB$ is 30. Verder geldt: $|BD| = 4$. Gevraagd: de lengte van de zijden van $\triangle ABC$.



Figuur 1

Maak rechthoek $KDBF$ even groot als vierhoek $AEDB$. Dan volgt: $|BF| = |DK| = \frac{30}{4} = 7\frac{1}{2}$.

Maak ook rechthoek $KDGH$ [1] even groot als driehoek EDC . Er volgt:

$$|DG| = |HK| = \frac{24}{7\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{5}$$

Rechthoek $BFHG$ is nu even groot als $\triangle ABC$ en $\triangle AFL$ en $\triangle GCM$ samen even groot als $\triangle LHM$.

Deze driehoek zijn allemaal gelijkvormig, want zij hebben gelijke hoeken. (*)

$$|KL| = |LF| = 2.$$

$$\text{En: } |LH| = |HK| + |KL| = 5\frac{1}{5}$$

$$\text{Er geldt: } |CG|^2 = |LH|^2 - |LH|^2. [2]$$

$$\text{Dus: } |CG| = \sqrt{\left(5\frac{1}{5}\right)^2 - 2^2} = 4\frac{4}{5}$$

$$\text{Vervolg: } |BC| = |CG| + |GD| + |DB| = 12.$$

$$\text{En hiermee: } |AB| = 2 * \frac{54}{12} = 9.$$

$$\text{En met Pythagoras: } |AC| = 15.$$

Anders:

Merk op dat $\triangle ABC$ groter is dan $\triangle EDC$ (in oppervlakte) met een factor: $\frac{30+24}{24} = 2\frac{1}{4}$.

De wortel hiervan is: $1\frac{1}{2}$.

Dit is de factor waarmee $|BC|$ groter is dan $|DC|$. [... en $|AB|$ groter is dan $|ED|$.]

Als nu zou gelden: $|DC| = 1$, dan zou volgen: $|BC| = 1\frac{1}{2}$. En daarmee: $|BD| = \frac{1}{2}$.

Daarom nu: $\frac{1}{2} : 4 = 1 : |DC|$. Dus: $|DC| = 8$ en $|BC| = 12$.

Opmerkingen 1:

[1] In HGQ staat foutief $EDGH$.

[2] Dit gaat wel erg snel.

Met de schets in figuur 2, niet in HGQ, is het wel af te leiden.

Uit (*) volgt: $\frac{1}{2}s * t = \frac{1}{2}p * q + \frac{1}{2}v * w$. Oppervlakten zijn gelijk.

Uit de gelijkvormigheid volgt: $\frac{v}{w} = \frac{t}{s}$ dus $v = \frac{t}{s} * w$.

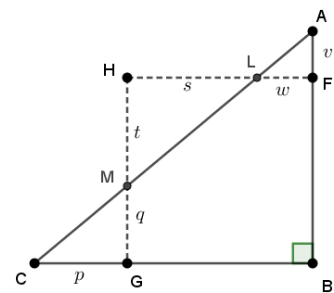
En ook: $\frac{q}{p} = \frac{t}{s}$ dus $q = \frac{t}{s} * p$.

Er volgt: $s * t = \frac{t}{s} * p^2 + \frac{t}{s} * w^2$.

Dus: $t * s^2 = t * p^2 + t * w^2$.

Waarmee volgt: $p^2 = s^2 - w^2$.

De halve cirkel in figuur 1 suggereert het gebruik van Pythagoras.



Figuur 2

Opmerking 2:

Met enige algebra zou het zo kunnen gaan:

$$|BC| = a, |AB| = c, |AC| = b, |CD| = p, |DE| = q.$$

$$\text{Uit de gegevens volgt: } pq = 48, ac = 108, p = a - 4, \frac{q}{p} = \frac{c}{a}.$$

$$\text{Dus: } q = \frac{c}{a}p = \frac{c}{a}(a - 4).$$

$$\text{En hiermee: } pq = (a - 4)^2 \frac{c}{a} = 48. \text{ En dan: } (a - 4)^2 ac = 48a^2.$$

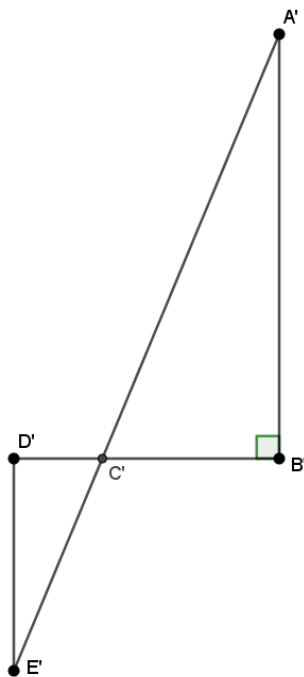
$$\text{Er volgt: } (a - 4)^2 108 = 48a^2. \text{ Ofwel: } 60a^2 - 864a + 1728 = 0.$$

Dit geeft als oplossingen: $a = 12, a = \frac{12}{5}$. De laatste voldoet niet: $a - 4 = p (> 0 !)$.

Verder ingevuld geeft dit: $c = 9, b = 15$.

ΔABC is een vergroting met factor 3 van een (3,4,5)-driehoek. Het keuze van rechthoekige driehoeken met geheeltallige zijden is vooralsnog beperkt.

De oplossing $a = \frac{12}{5}$ heeft ook een meetkundige betekenis. Er hoort dan wel een andere figuur bij, zie figuur 3. Punt C ligt nu tussen B en D .



Figuur 3

Nu geldt:

$$|B'C'| = a = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}.$$

Dus:

$$|C'D'| = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

$$\text{Met: } Opp(\Delta C'D'E') = 24$$

Volgt:

$$|D'E'| = 30.$$

En op basis van verhoudingen:

$$|A'B'| = \frac{12}{8} * 30 = 45.$$

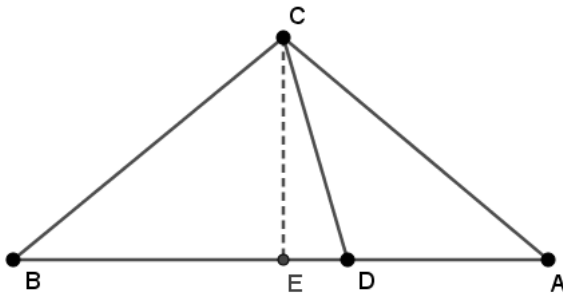
$$Opp(\Delta A'B'C') = 54.$$

Q19 Hoogtelijn binnen driehoek 2

Zie figuur 1. Voor driehoek ABC geldt: $|AC| = |BC|$.

Verder zijn gegeven: $|AD| = 10$, $|BD| = 12$, $|CD| = \sqrt{106}$.

Gevraagd is de lengte van hoogtelijn CE .



Figuur 1

$$|AE| = |BE| = 11. [1]$$

$$|ED| = |BD| - |BE| = 1.$$

$$\text{Dus: } |CE|^2 = |CD|^2 - |DE|^2 = 105.$$

$$\text{Dus: } |CE| = \sqrt{105}.$$

En met Pythagoras zijn nu ook $|AC|$ en $|BC|$ te vinden.

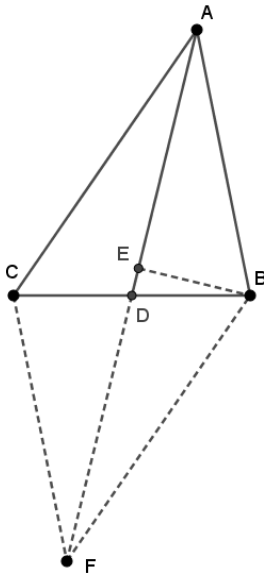
Opmerking:

Een eenvoudige kwestie. Vermoedelijk is de aanpak nodig voor een volgende kwestie...

[1] Bij een gelijkbenige driehoek is voetpunt E van de hoogtelijn het midden van de basis.

Q20 Zwaartelijin in driehoek

Zie figuur 1. Gegeven is van driehoek ABC : $|AB| = 10$, $|AC| = 12$. D is het midden van BC .
Er geldt: $|AD| = \sqrt{106}$. Gevraagd: $|CD|$ ($= |BD|$).



Figuur 1

Maak AD eens zo lang: $|AF| = \sqrt{424}$.
Dan geldt verder: $|BF| = |AC| = 12$.
Want $\triangle ADC$ is gelijk aan $\triangle FDB$. [1]

Van $\triangle ABF$ zijn nu de drie zijden bekend en met 'onse eerste exempel' (Q1) is dan de lengte van de hoogtelijn te berekenen:

$$|BE| = \sqrt{14 \frac{91}{106}}. [2]$$

$$\text{En ook: } |AE| = \sqrt{85 \frac{15}{106}}.$$

$$\text{Er volgt: } |ED| = |AD| - |AE| = \sqrt{1 \frac{15}{106}}.$$

$$\text{Dus: } |BD|^2 = |ED|^2 + |BE|^2 = 16.$$

Tenslotte: $|BD| = 4 = |CD|$, $|BC| = 8$.

Opmerkingen 1:

[1] Volgt het congruentiegeval ZHZ. De gelijkheid van de zijden volgt ook uit het feit dat vierhoek $ACFB$ een parallellogram is: de diagonalen delen elkaar namelijk middendoor.

[2] In HGQ ontbreekt hier het wortelteken.

Opmerking 2:

Enig gereken aan dit probleem laat zien dat $|AD|$ niet geheel kan zijn, als de zijden van de driehoek dat wel zijn. En met $|AD| = \sqrt{k}$ met k geheeltallig volgt het volgende:

Neem $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a = 2m$.

Dan volgt met de cosinus-regel in $\triangle ADC$ en in $\triangle ADB$:

$$c^2 = k + m^2 - 2m\sqrt{k} * \cos(\sphericalangle ADC).$$

$$b^2 = k + m^2 - 2m\sqrt{k} * \cos(\sphericalangle ADB).$$

$$\text{Uitgewerkt geeft dit: } k = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - m^2.$$

Hieruit volgt: b en c zijn allebei even of allebei oneven.

Met $b = 10$, $c = 12$ had Cardinael nog negen keuzen voor a .

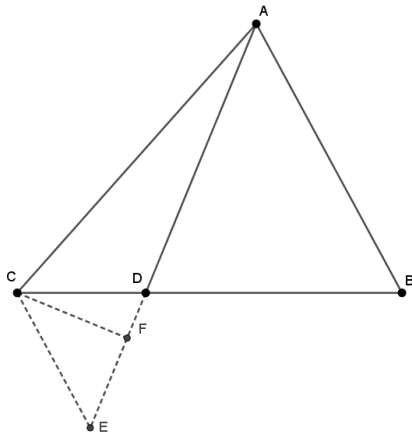
Hij kiest voor $a = 8$ ($m = 4$) en dus $k = 106$.

Dit is ook de keuze in Q19 voor $|AD|$.

Q21 Zijden driehoek met verhoudingen 3

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is gegeven: $|AB| = 13$, $|AC| = 15$. [1]

D ligt op basis BC zodat geldt: $|CD| = \frac{1}{3}|BC|$. Verder: $|AD| = \sqrt{162\frac{7}{9}}$. Gevraagd: $|BC|$.



Figuur 1

Getrokken is CE evenwijdig aan AB .

Dan geldt: $\triangle ADB$ is gelijkvormig met $\triangle EDC$.

Er volgt:

$$|BD|:|CD| = |AB|:|CE| = |AD|:|DE| = 2:1.$$

Hieruit volgt nu:

$$|CE| = 6\frac{1}{2}, |DE| = \sqrt{40\frac{25}{36}}$$

$$\text{En: } |AE| = |AD| + |DE| = \sqrt{366\frac{1}{4}}$$

Met Q1 volgt nu:

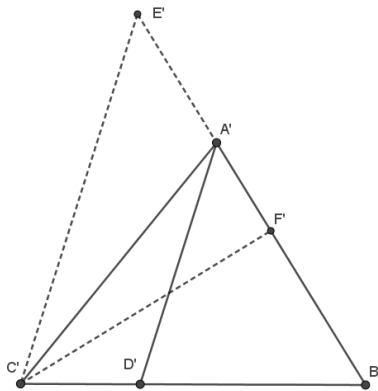
$$|CF| = \sqrt{19\frac{389}{1465}} \quad [2]$$

$$|FE| = \sqrt{22\frac{5769}{5860}} \quad \text{En daarmee: } |DF| = \sqrt{2\frac{6754}{13185}} \quad [3]$$

$$\text{En dan: } |CD|^2 = |CF|^2 + |DF|^2 = 21\frac{7}{9}.$$

$$|CD| = 4\frac{2}{3}, |BD| = 9\frac{1}{3}, |BC| = 14.$$

Anders:



Figuur 2

Zie figuur 2. Nu is $C'E'$ evenwijdig aan $A'D'$.

Uit gelijkvormigheid volgt: $|B'E'| = 19\frac{1}{2}$, $|A'E'| = 6\frac{1}{2}$.

Omdat van $\triangle A'C'E'$ de zijden bekend zijn [4],

kan nu met Q2 gevonden worden:

$$|A'F'| = 7\frac{8}{13}, |B'F'| = 5\frac{5}{13}, |C'F'| = \sqrt{167\frac{1}{169}}$$

$$|B'F'|^2 + |C'F'|^2 = |B'C'|^2 = 196.$$

Dus:

$$|B'C'| = 14.$$

Opmerkingen 1:

[1] In HGQ staat foutief: $|BC| = 15$. Die lengte moet juist berekend worden!

[2] Na enig gereken volgt: $Opp(\triangle ACE) = 42$.

[3] Schrijver dezes heeft hulp gekregen van *Wolfram Alpha*...

[4] $|C'E'| = \frac{3}{2} * |A'D'|$.

Opmerking 2:

Bij figuur 1 zou met enige trigonometrie volgen, waarbij $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = d$:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac * \cos(\beta).$$

$$d^2 = c^2 + \left(\frac{2}{3}a\right)^2 - 2\frac{2}{3}ac * \cos(\beta). (*)$$

Dat geeft de vergelijking:

$$2a^2 = 6b^2 + 3c^2 - 9d^2.$$

En met de gegeven waarden voor b , c en d volgt:

$$|BC| = a = 14.$$

Omgekeerd:

Als handig gekozen is voor $(a, b, c) = (14, 15, 13)$,

dan volgt voor d :

$$9d^2 = 1465, \text{ dus: } d = \sqrt{162\frac{7}{9}}.$$

Een handig lijkende keuze $a = 18$, een 3-voud dus bij (*), maakt dit alles niet eenvoudiger:

$$d = \sqrt{134\frac{1}{3}}.$$

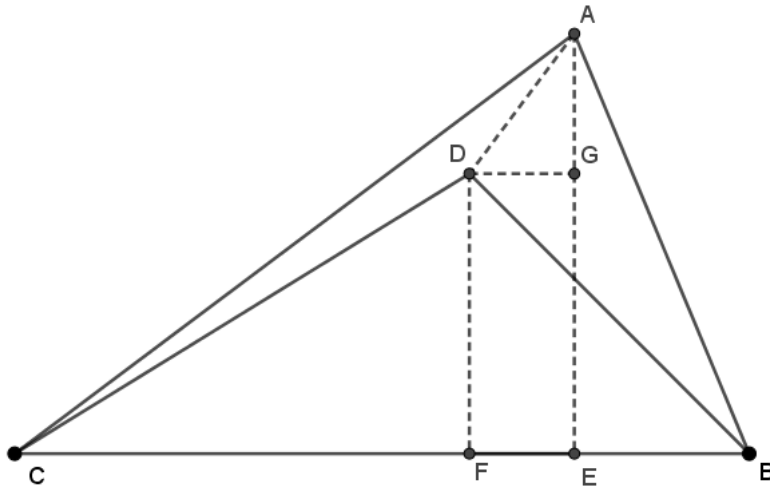
Vrijwel zeker is dit vraagstuk ontworpen van achter naar voren, waarna de 'constlievende lezer' fijn mag gaan rekenen.

Q22 Lijnstuk binnen driehoek 1

Zie figuur 1. Gegeven is een driehoekig stuk land ABC : $|AB| = 26$, $|AC| = 40$, $|BC| = 42$.

In D ligt een put: $|BD| = \sqrt{512}$, $|CD| = \sqrt{932}$. [1]

Men wil een sloot graven van D naar A . Gevraagd: $|AD|$.



Figuur 1

Met Q1 is te berekenen: $|AE| = 24$, $|BE| = 10$. [2]

En ook met Q1: $|DF| = 16$, $|BF| = 16$. [2][3]

Dus: $|DG| = |FE| = 6$.

En: $|AG| = |AE| - |DF| = 8$.

Met Pythagoras volgt: $|AD| = 10$.

Opmerkingen:

[1] Weinig realistische getallen voor een reëel probleem...

Er wordt in dit probleem ook nergens over 'voet' als eenheid voor lengte gesproken.

[2] Zonder Q1 kan dat, zie aldaar, opmerking 1:

Eerst: $Opp(\triangle ABC) = 504$. Etc.

En: $Opp(\triangle BCD) = 336$. Etc.

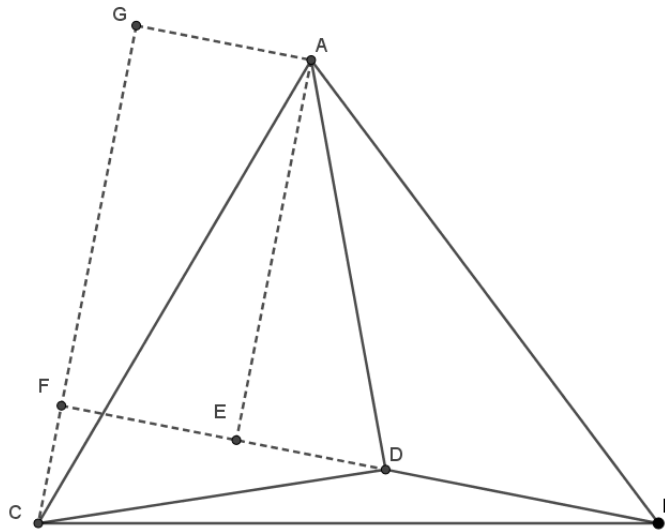
[3] Nu blijkt dat $|BD| = \sqrt{512}$ handig gekozen is: $|BD|^2 = 512 = 256 + 256 = 16^2 + 16^2$.

Q23 Zijden driehoek berekenen 6

Zie figuur 1. Voor $\triangle ABC$ geldt: $|AB| = 14$, $|BC| = 15$. [1]

Voor D geldt: $|AD| = \sqrt{101\frac{1}{4}}$, $|BD| = \sqrt{45\frac{1}{4}}$, $|CD| = 8\frac{1}{2}$.

Gevraagd: $|AC|$.



Figuur 1

Met Q2 is te berekenen: $|AE| = \sqrt{87\frac{129}{181}}$, $|BE| = \sqrt{108\frac{52}{181}}$.

En ook: $|CF| = \sqrt{8\frac{73}{181}}$, $|BF| = \sqrt{216\frac{108}{181}}$.

Daarmee volgt: $|GC| = |GF| + |CF| = |AE| + |CF| = \sqrt{150\frac{75}{181}}$. [2]

En: $|AG| = |EF| = |BF| - |BE| = \sqrt{18\frac{106}{181}}$.

Met Pythagoras: $|AC|^2 = |AG|^2 + |GC|^2 = 169$.

Dus: $|AC| = 13$.

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat foutief: $|AD| = 14$.

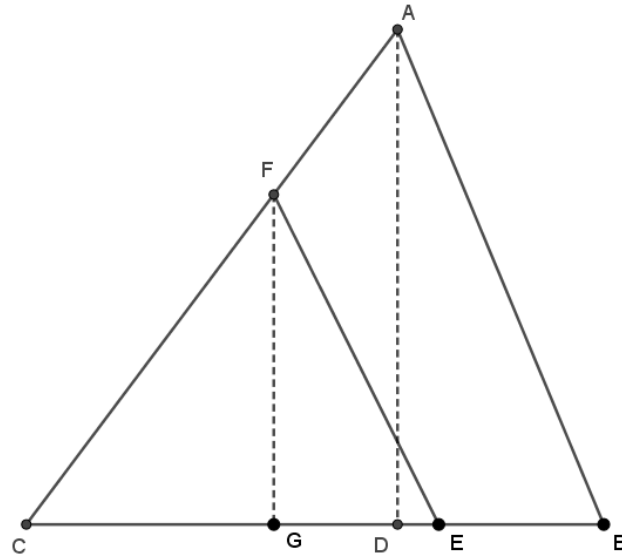
[2] Handmatig zal het zo zijn gegaan:

$$\sqrt{87\frac{129}{181}} + \sqrt{8\frac{73}{181}} = \sqrt{\frac{15876}{181}} + \sqrt{\frac{1521}{181}} = \frac{126}{\sqrt{181}} + \frac{39}{\sqrt{181}} = \frac{165}{\sqrt{181}} = \sqrt{\frac{27225}{181}} = \sqrt{150\frac{75}{181}}$$

Een oefening in kwadrateren, worteltrekken en rekenen met breuken voor de actieve lezer.

Q24 Lijnstuk binnen driehoek 2

Zie figuur 1. Een driehoekig stuk land is gegeven bijvoorbeeld $\triangle ABC$, waarvoor geldt: $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$. De stukken BE en AF en EF zijn sloten met: $|BE| = 4$, $|AF| = 5$.
Gevraagd: $|EF|$.



Figuur 1

Met Q1 is te berekenen: $|AD| = 12$, $|CD| = 9$.

$|CF| = 10$.

Omdat geldt: $|CG| : |CD| = |CF| : |CA|$ volgt: $|CG| = 6$.

En ook: $|FG| : |AD| = |CF| : |CA|$. Dus: $|FG| = 8$.

$|EG| = |BC| - |BE| - |CG| = 14 - 4 - 6 = 4$.

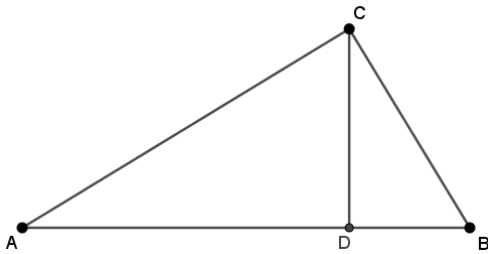
En dan met Pythagoras:

$|EF|^2 = |EG|^2 + |FG|^2 = 80$.

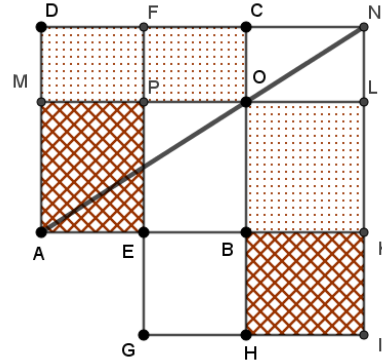
De lengte van de sloot: $|EF| = \sqrt{80}$.

Q25 Middelvenredige 3

Zie figuur 1. $\triangle ABC$ is rechthoekig in C . CD is een hoogtelijn. Er geldt: $|BC| = 10 - \sqrt{20}$. En verder geldt: $|BD| : |AD| = |AD| : |AB|$. Gevraagd: $|AB|, |AC|, |AD|, |BD|$.



Figuur 1



Figuur 2

Kijk nu naar figuur 2. [Dit zijn andere punten A, B, C, D : verwarrend.]

Maak vierkant $ABCD$. Haal daarvan af rechthoek $DMOC$ die even groot is als vierkant $BOLK$. (*)

Er geldt: $|OB|^2 = |OC| * |CD|$. En met: $|CD| = |BC|$ volgt: $|OC| : |OB| = |OB| : |BC|$. (**)

Met verhouding volgt namelijk: $|NL| : |OL| = |OB| : |AB|$. En: $|OL| = |OB|, |NL| = |OC|$.

Zoals staat in propositie 11, boek II, Euclides en in prop. 30, boek VI, bewezen wordt. [1]

Neem nu punt E als midden van AB en veronderstel: $|AB| = 2$.

Dan volgt: $Opp(EBHG) = 1$. En: $Opp(ABCD) = 4$.

Er geldt: $Opp(EBOP) + Opp(BOLK) + Opp(HBKI) = 4$. Zie (*).

Dus samen met vierkant $EBHG$ geeft dat vierkant $GPLI$ met oppervlakte 5.

Dus: $|GI| = \sqrt{5} = |EK|$. En met $|EB| = 1$ volgt: $|BK| = \sqrt{5} - 1 = |OB|$.

Er resteert dus: $|OC| = 2 - (\sqrt{5} - 1) = 3 - \sqrt{5}$.

Dus (**): $|OC| : |OB| = (3 - \sqrt{5}) : (\sqrt{5} - 1) = (\sqrt{5} - 1) : 2 = |OB| : |BC|$.

Er was begonnen met: $|AB| = |BC| = 2$. (in figuur 2)

Intermezzo zie figuur 3: dat is het resultaat tot nu toe!

	<p>In het figuur hiernaast zou volgen voor h:</p> $h^2 = (\sqrt{5} - 1)(3 - \sqrt{5}) = 4\sqrt{5} - 8.$ <p>En: $a = \sqrt{(4\sqrt{5} - 8) + (3 - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - 1$.</p> <p>Maar gegeven is hiervoor de lengte:</p> $10 - \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1).$ <p>Dus alle lengtes zijn een factor $2\sqrt{5}$ groter.</p>
--	--

Dan volgt (in figuur 1): $|AD| = (\sqrt{5} - 1) * 2\sqrt{5} = 10 - \sqrt{20}$.

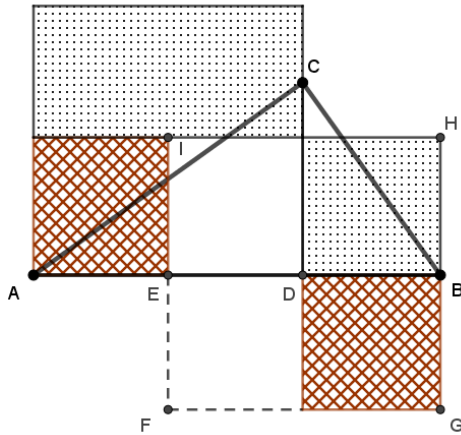
En: $|BD| = (3 - \sqrt{5}) * 2\sqrt{5} = \sqrt{180} - 10$.

Dus: $|AB| = |AD| + |BD| = 4\sqrt{5} = \sqrt{80}$. En: $|CD| = \sqrt{(4\sqrt{5} - 8) * 2\sqrt{5}} = \sqrt{(80\sqrt{5} - 160)}$.

En daarmee: $|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 = 40\sqrt{5} - 40 = \sqrt{8000} - 40$. [2]

Anders:

Er wordt een andere figuur gebruikt, zie figuur 4.



Figuur 4

Uit gelijkvormigheid van driehoeken volgt:

$$|BD| : |BC| = |BC| : |AB|.$$

Gegeven was: $|BD| : |AD| = |AD| : |AB|$.

$$\text{Dus: } |BC| = |AD| = 10 - \sqrt{20}.$$

Met E het midden van AD (i) volgt:

$$\text{Opp(vierkant onder ED)} = 30 - 10\sqrt{5}.$$

$$\text{Opp(vierkant op AD)} = 120 - 40\sqrt{5}.$$

Samen is dit de oppervlakte van vierkant FGHI.

$$\text{Dus: } |EB|^2 = 150 - 50\sqrt{5}. \quad [3]$$

$$\text{Gevolg: } |EB| = 5\sqrt{5} - 5.$$

$$\text{En: } |BD| = |EB| - |ED| = 6\sqrt{5} - 10. \text{ Zie (i).}$$

$$\text{En: } |AB| = |EB| + |ED| = 4\sqrt{5} = \sqrt{80}.$$

Opmerkingen:

[1] Dit gaat over de zogenaamde 'gouden snede' en hoe die te construeren. In de Elementen, boek II en VI, wordt dit het verdelen van een lijnstuk in uiterste en middelste reden genoemd.

$$a : \lambda a = \lambda a : (1 + \lambda)a, \quad \lambda > 1. \text{ Er volgt: } \lambda^2 - \lambda - 1 = 0. \quad \lambda = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618 \dots$$

[2] Cardinael laat vaak grote getallen staan en reduceert de wortel niet verder.

[3] Met hetzelfde argument als bij de eerste aanpak en figuur 2.

Met enige algebra zou het zo kunnen gaan.

$|BC| = a$, die is gegeven.

De te berekenen lijnstukken zijn: $|AD| = x, |BD| = y, |AC| = b, |CD| = h, |AB| = x + y$.

Dan is verder gegeven: $\frac{y}{x} = \frac{x}{x+y}$ ofwel:

$$(1) \quad xy + y^2 = x^2.$$

Verder geldt:

$$(2) \quad h^2 = xy, \quad (3) \quad a^2 = h^2 + y^2, \quad (4) \quad b^2 = h^2 + x^2.$$

Uit (1) en (2) volgt: $h^2 + y^2 = x^2$. En dus met (3): $x = a$.

Met (1) volgt dan: $y^2 + ay - a^2 = 0$. Dus: $y = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. En: $x + y = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1)$.

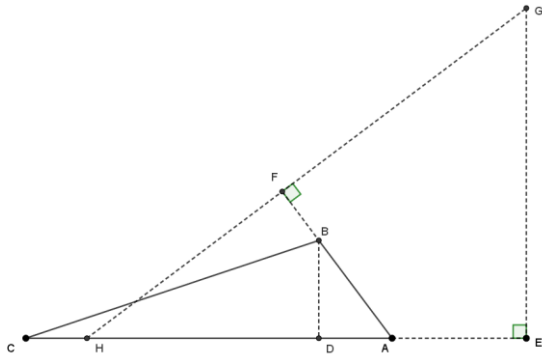
Met (2) volgt: $h^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{5} - 1)$.

Met (4) volgt: $b^2 = \frac{1}{2}a^2(\sqrt{5} + 1)$.

En verder na substitutie: $a = 10 - \sqrt{20}$. Etc.

Q26 Lengtes buiten driehoek

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is gegeven: $|AB| = 10$, $|BC| = \sqrt{640}$, $|AC| = 30$. Twee zijden zijn verlengd zodat geldt: $|AE| = 11$, $|BF| = 5$. De lijn door E loodrecht op AE en de lijn door F loodrecht op BF snijden in punt G . Gevraagd: $|FG|$, $|EG|$.



Figuur 1

Met Q1 zijn te berekenen: $|BD| = 8$, $|AD| = 6$.
De driehoeken AFH , GEH en ADB zijn gelijkvormig. [1]

Daaruit volgt:

$$|AF| : |AH| = |AD| : |AB|, \quad 15 : |AH| = 6 : 10.$$

$$\text{Dus: } |AH| = 25.$$

$$|FH| : |AF| = |DB| : |AD|, \quad |HF| : 15 = 8 : 6.$$

$$\text{Dus: } |HF| = 20.$$

$$|AF| : |FH| = |GE| : |EH|, \quad 15 : 20 = |GE| : 36.$$

$$\text{Dus: } |GE| = 27.$$

$$|AH| : |FH| = |GH| : |EH|, \quad 25 : 20 = |GH| : 36.$$

$$\text{Dus: } |GH| = 45. \text{ En: } |FG| = 45 - 20 = 25.$$

Opmerkingen:

[1] Zij hebben telkens twee hoeken gelijk. Lijn AF heet anti-parallel aan lijn EG .

Dit gaat met analytische meetkunde zeker niet eenvoudiger.

Eerst met de cosinus-regel: $\cos(\sphericalangle A) = \frac{3}{5}$. Gelukkig geldt toevallig (?): $|BC| = \sqrt{640}$.

Benoem de onbekende zijden: $|EG| = x$, $|FG| = y$.

Merk op: $\sphericalangle EAF = 180^\circ - \sphericalangle A$, $\sphericalangle EGF = \sphericalangle A$.

Met tweemaal de cosinus-regel in vlieger $AEGH$ volgt: $x^2 + y^2 - \frac{6}{5}xy = 544$. (i)

Omdat $\triangle AEG$ en $\triangle AFG$ rechthoekig zijn, volgt: $x^2 + 121 = y^2 + 225$. (ii)

Dit uitgewerkt geeft:

$$y^4 - 746y^2 + 75625 = (y - 11)(y + 11)(y - 25)(y + 25) = 0.$$

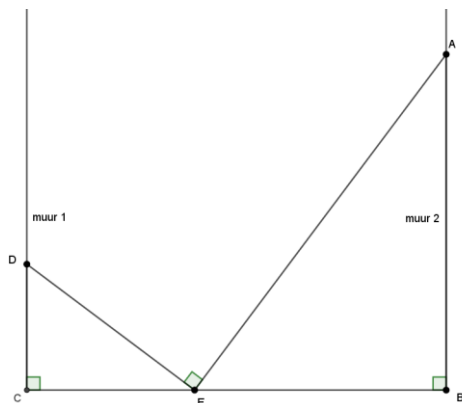
Met $y = 25$ is er ook een positieve waarde voor x namelijk $x = 27$.

NB: (i) is de vergelijking van een ellips en (ii) de vergelijking van een hyperbool.

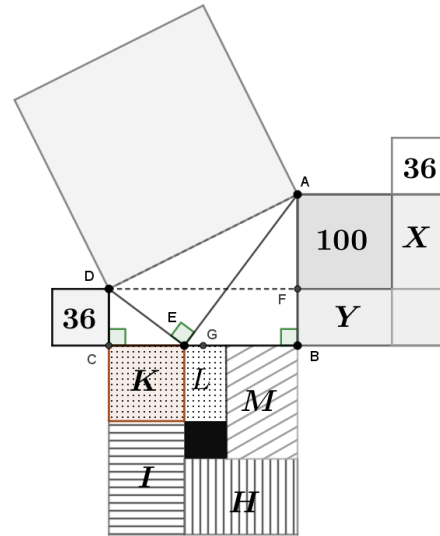
Er zijn vier snijpunten waarvan alleen die in het eerste kwadrant voldoet aan het vraagstuk.

Q27 Lengtes van ladders

Zie figuur 1. Tussen twee muren staan ladders AE en DE met te E een rechte hoek. Verder is gegeven: $|CD| = 6$, $|AB| = 16$, $|BC| = 20$. Gevraagd: $|BE|$, $|CE|$, $|AE|$, $|DE|$.



Figuur 1



Figuur 2

Zie figuur 2. [1] Met Pythagoras volgt: $|AD|^2 = |AF|^2 + |BC|^2$. Want: $|BC| = |DF|$.

Maar ook: $|AD|^2 = |AE|^2 + |DE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2 + |CE|^2 + |CD|^2$.

Er volgt: $|BC|^2 = (|BE|^2 + |CE|^2 + |CD|^2) + |AB|^2 - |AF|^2$. (*)

Met plaatje rechtsboven in figuur 2 volgt: $|AB|^2 - |AF|^2 = 256 - 100 = Opp(X + Y) + |CD|^2$.

Dus: $Opp(X + Y) = 120$.

Er geldt ook: $|BC|^2 = |BE|^2 + |CE|^2 + Opp(I) + Opp(H)$. De stukken I en H zijn even groot!

Uit (*) volgt dan weer:

$$|BE|^2 + |CE|^2 + Opp(I) + Opp(H) = |BE|^2 + |CE|^2 + |CD|^2 + 120 + |CD|^2.$$

Dus: $Opp(I) + Opp(H) = 192$.

Met rechthoeken als I kan het vierkant onder BC belegd worden: rechthoeken $I, H, M, (K + L)$ die allen even groot zijn plus het zwarte vierkantje. [2]

Er volgt: het zwarte vierkant heeft oppervlakte: $20^2 - 2 * 192 = 16$.

Dus met zijde van lengte 4.

Met G het midden van BC volgt nu: $|EG| = 2$.

Dus: $|BE| = 10 + 2 = 12$, $|CE| = 10 - 2 = 8$.

Met Pythagoras volgt verder: $|AE| = 20$, $|DE| = 10$.

Opmerkingen 1:

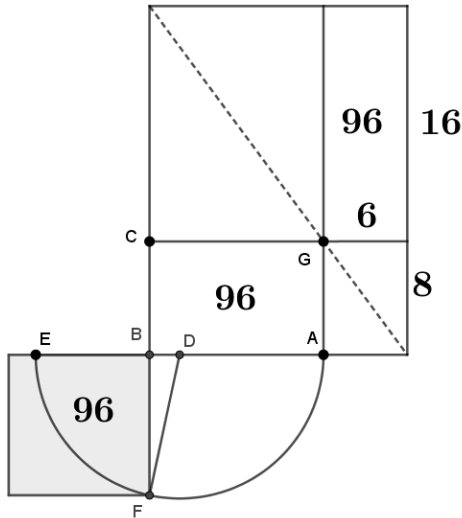
[1] Dit is de figuur zoals die min of meer in HGQ staat, een groot analysefiguur. Nu worden dus ook gebieden met een hoofdletter aangeduid en voor het eerst staan getallen in de figuur.

De letters X en Y zijn toegevoegd door schrijver dezes.

[2] Het idee is dat met vier rechthoeken met afmeting a bij b ($a > b$) een vierkant te leggen is met zijde $a + b$. Er moet dan 'in het midden' nog een vierkant met zijde $a - b$ komen.

Algebraïsch: $(a + b)^2 = 4 * ab + (a - b)^2$.

Anders:



Figuur 3

Uit figuur 1 en met gelijkvormigheid volgt:

$$|AB| : |BE| = |EC| : |CD|.$$

$$\text{Dus: } |BE| * |EC| = |AB| * |CD| = 96.$$

$$\text{En ook nog: } |BE| + |EC| = 20.$$

Verder met figuur 3 [nieuwe hoekpuntletters!].

Als nu $|BE| = |BC|$, dan $|AE| = 20$.

Met D midden van AE volgt:

$$|DA| = |DF| = |DE| = 10.$$

$$\text{En: } |BF|^2 = |BE| * |AB| = 96.$$

$$|DF|^2 - |BF|^2 = |BD|^2. \text{ Met Pythagoras.}$$

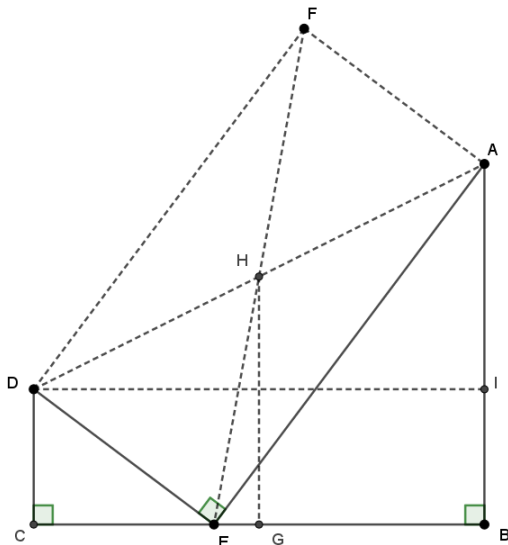
$$\text{Dus: } |BD| = 2.$$

$$\text{En: } |AB| = 10 + 2 = 12, |BE| = 10 - 2 = 8.$$

En dit zijn de lengtes in figuur 1:

$$|BE| = 12, |EC| = 8.$$

Anders:



Figuur 4

[Figuur 1 aangevuld geeft figuur 4.]

In rechthoek zijn AD en EF diagonalen.

Met $|AI| = 10$ volgt met Pythagoras:

$$|AD| = \sqrt{500}.$$

$$\text{En: } |HD| = |AD| = |HE| = \sqrt{125}.$$

$$|CD| + |AB| = 22.$$

H het midden van AD en (dus) $|HG| = 11$.

G midden van BC , dus er volgt:

$$|GE|^2 = 125 - 11^2 = 4.$$

$$\text{Dus: } |CE| = 10 - 2 = 8.$$

$$\text{En: } |BE| = 10 + 2 = 12.$$

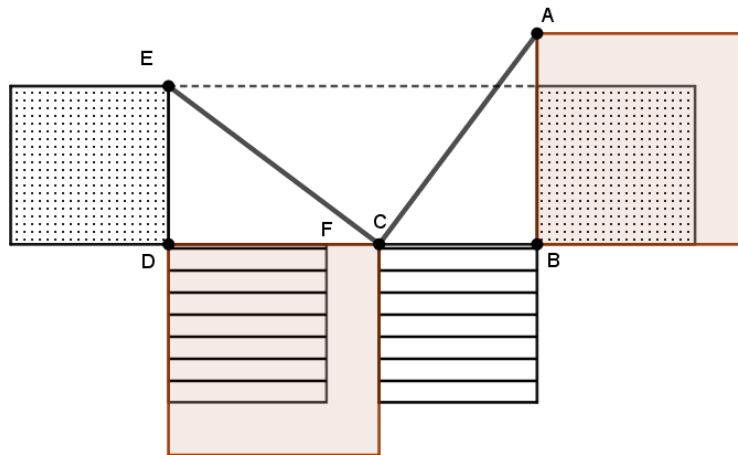
Opmerking 2:

De laatste aanpak is het kortste en heel mooi.

Een aanpak met algebra is zeker niet mooier...

Q28 Lengte van één ladder

Zie figuur 1 [1]. Een metselaar heeft in een kamer een ladder gezet in een punt C die tegen een muur leunt op hoogte $|AB| = 20$ [voet] en tegen de muur daartegenover, vanaf hetzelfde punt C , leunt op een hoogte $|DE| = 15$. Als nu geldt: $|BD| = 35$, dan is de vraag: Wat is de lengte van de ladder?



Figuur 1

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 = |EC|^2 = |CD|^2 + |DE|^2.$$

$$\text{Dus: } |AB|^2 - |DE|^2 = |CD|^2 - |BC|^2.$$

En: $|AB|^2 - |DE|^2 = 175$. Dat is de oppervlakte van het *gnomon* in het vierkant bij AB .

Dus ook het *gnomon* in het vierkant bij CD heeft deze oppervlakte.

$$\text{Er volgt nu: } |FC| = 175/35 = 5. [2]$$

Resteert voor $|BC|$ en $|DF|$ samen en die ook even groot zijn: 30.

$$\text{Dus: } |CD| = 15 + 5 = 20, |BC| = 15. [3]$$

Opmerkingen:

[1] Deze figuur heeft andere arceringen dan in HGQ. In HGQ is het stippelvierkant bij AB even groot als het streepvierkant bij DF . Als AC niet loodrecht staat op EC , en dat was niet gegeven, dan hoeft dat niet zo te zijn. Bij deze keuze van de startgetallen klopt het wel.

[2] Het verhaal in HGQ is niet zo helder. Bedoeld is mogelijk het volgende.

$$\text{Benoem even zijden: } |BC| = y, |CF| = z.$$

$$|CD|^2 - |BC|^2 = (y + z)^2 - y^2 = 175.$$

$$\text{Dus: } 2yz + z^2 = (2y + z)z = 35z = 175. \text{ Dus: } z = 5.$$

[3] Hier stopt het verhaal in HGQ. De vraag naar de lengte van de ladder wordt niet beantwoord!

Met enige algebra gaat het zo, met $|AC| = |EC| = x, |BC| = y$.

$$\text{Er volgt: } x^2 = 400 + y^2.$$

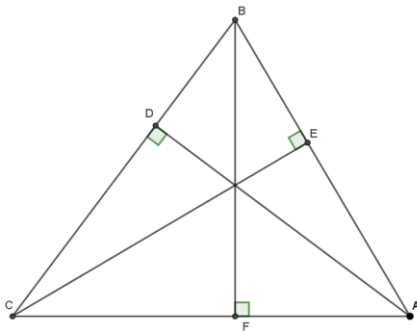
$$\text{En: } x^2 = 225 + (35 - y)^2.$$

Dat geeft: $y = 15$. En ingevuld in de eerste vergelijking: $x = 25$, de lengte van de ladder.

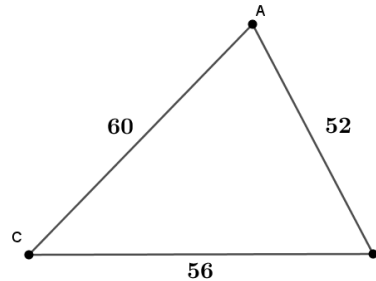
Q30 Berekening met hoogtelijnen

Zie figuur 1. Van driehoek ABC zijn de lengtes van de hoogtelijnen gegeven:

$$|AD| = 60, |BF| = 56, |CE| = 64\frac{8}{13}. \text{ Gevraagd: } |AC|, |BC|, |AB|.$$



Figuur 1



Figuur 2

Er geldt: $|AD|:|CE| = |AB|:|BC|$; $|AD|:|BF| = |AC|:|BC|$. [1]

Als nu zou gelden: $|BC| = 56$, dan zou volgen: $|AB| = \frac{|AD|}{|CE|} * |BC| = 52$ en $|AC| = 60$.

We hebben dan figuur 2. [2]

Met Q1 is te vinden voor de hoogtelijn uit A: $|AD| = 48$.

Nu in verhouding te maken met de (echte) waarde: $|AD| = 60$.

Er volgt: $|BC| = \frac{60}{48} * 56 = 70$, $|AC| = 75$, $|AB| = 65$.

Anders:

Deel de lengtes van de hoogtelijnen op een gekozen getal. 'Ick neme naer mijn believen 1'.

In deze verhouding zijn dan ook de zijden. $|BC|:|AC|:|AB| = \frac{1}{60}:\frac{1}{56}:\frac{13}{840}$. [3]

En omgezet naar gehele getallen: $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$.

Met Q1 is te vinden voor de hoogtelijn uit A: $|AD| = 12$.

En net als hierboven volgt nu: $|BC| = \frac{60}{12} * 14 = 70$, $|AC| = 75$, $|AB| = 65$.

Opmerkingen:

[1] Dit volgt uit: $\frac{1}{2}|CE| * |AB| = \frac{1}{2}|AD| * |BC| = \frac{1}{2}|BF| * |AC|$.

[2] Nu zijn de hoekpunten met de klok mee geplaatst! Anders dan in figuur 1.

[3] In HGQ staat foutief: $\frac{13}{640}$.

Met algebra is het niet makkelijk rekenen.

Benoem: $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|BC| = a$; $|AD| = p$, $|BF| = q$, $|CE| = r$; p, q, r bekend.

Er geldt vanwege de oppervlakte: $a * p = b * q = c * r$. (*)

Merk op: $|BC|$ is opgebouwd uit twee stukken. Er volgt: $a = \sqrt{b^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2}$.

Met (*) volgt nu: $p * (\sqrt{b^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2}) = c * r$. En ook: $b = c * \frac{r}{q}$.

Dat geeft een vergelijking in c : $p * (\sqrt{(c * \frac{r}{q})^2 - p^2} + \sqrt{c^2 - p^2}) = c * r$.

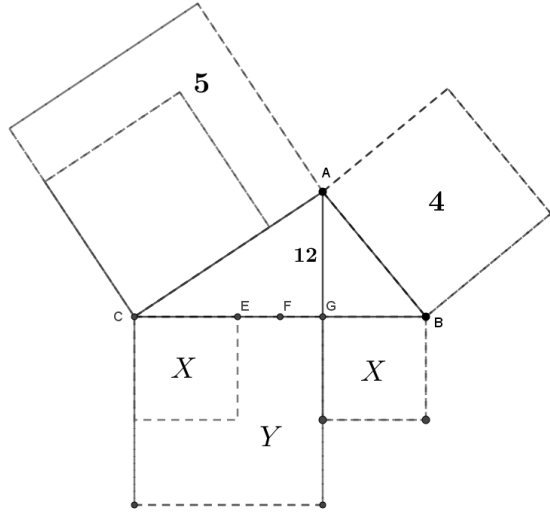
Met waarden voor p, q, r volgt:

$$13\sqrt{c^2 - 3600} + 15\sqrt{c^2 - 2704} = 14c. \text{ Er volgt dan: } c = 65 = |AB|.$$

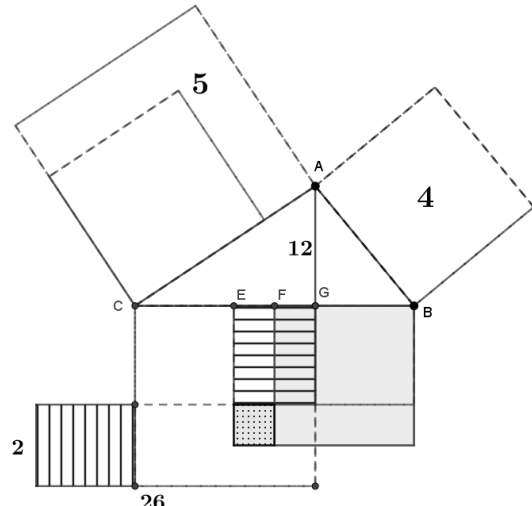
Q32 Zijden driehoek berekenen 9

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is een hoogtelijn en basis gegeven: $|AG| = 12$, $|BC| = 26$.

Verder geldt: $|AC| : |AB| = 3 : 2$. Gevraagd: $|AC|, |AB|$.



Figuur 1



Figuur 2

Uit de verhouding volgt: $|AC|^2 : |AB|^2 = 9 : 4$. Dus: $(|AC|^2 - |AB|^2) : |AB|^2 = 5 : 4$.

Als geldt: $|AC|^2 - |AB|^2 = 5$, dan ook: $|GC|^2 - |BG|^2 = Y = 5$.

Neem nu: $|GE| = 2$. Dan is te 'zien' in figuur 2, dat geldt: $Y = 26 * 2 = 52$ (*).

Er volgt: $(|AC|^2 - |AB|^2) : |AB|^2 = 5 : 4 = 52 : 41 \frac{3}{5}$. Dus: $|AB|^2 = 41 \frac{3}{5}$.

Als dus geldt: $|BF| = 13$ (met dus $|GE| = 2$), dan zou volgen: $|BF|^2 + |AG|^2 = 313$.

[Het verhaal volgt hier Cardinael, maar is meer algebraïsch genoteerd.]

Maar als $|BF| = 13 - |EF|$ [1], en omdat geldt: $|GF| = |EF|$, zou dan volgen:

$$|AB|^2 = |BF|^2 + |AG|^2 = 313 - 26 * |EF| + |EF|^2.$$

Er geldt echter ook: $|AB|^2 = 41 \frac{3}{5} * |EF|$. Zie (*): $Y = 26 * |GE| = 26 * 2 * |EF|$.

Dus: $313 - 26 * |EF| + |EF|^2 = 41 \frac{3}{5} * |EF|$. Dit geeft: $67 \frac{3}{5} * |EF| - |EF|^2 = 313$. [2]

Ofwel: $(33 \frac{4}{5} - |EF|)^2 = (33 \frac{4}{5})^2 - 313 = 1142 \frac{11}{25} - 313 = 829 \frac{11}{25} = (28 \frac{4}{5})^2$. [3]

Er volgt: $|EF| = 5$. Dus: $|BG| = 13 - 5 = 8$, $|GC| = 18$, $|AB| = \sqrt{208}$, $|AC| = \sqrt{468}$.

Opmerkingen:

[1] $|EF|$ is dus een soort variabele.

[2] In HGQ staat hier een tekening bij die deze 'vergelijking' illustreert.

[3] Dit is een soort van 'kwadraat afsplitsen' en is in HGQ geïllustreerd in die tekening. Algebraïsch gaat het iets makkelijker...

Met $|CG| = x$, $|BG| = 26 - x$ volgt met Pythagoras:

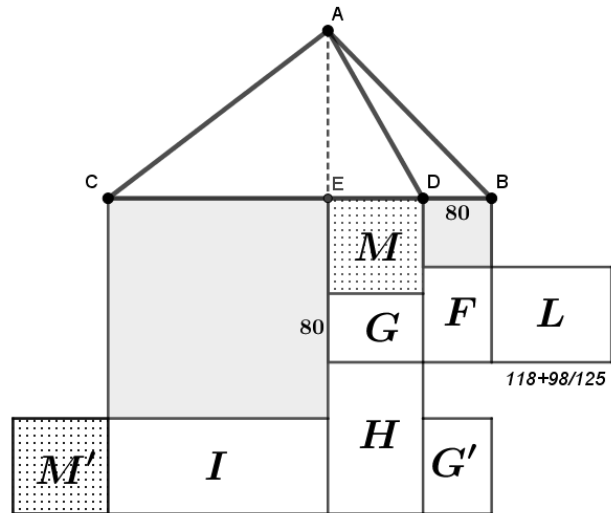
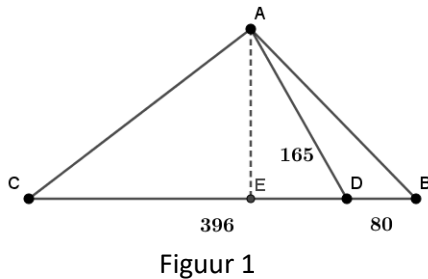
$$(x^2 + 144) : ((26 - x)^2 + 144) = 9 : 4. \text{ Dus: } 4(x^2 + 144) = 9(x^2 - 52x + 820).$$

Dit geeft $(5x^2 - 468x + 6804 = 0)$ met als oplossingen: $x = 18$, $x = 75 \frac{3}{5}$.

Met $|CG| = 18$ volgt dan snel: $|AC| = \sqrt{18^2 + 12^2} = \sqrt{468}$.

Q33 Zijden driehoek met verhoudingen 4

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is van de basis gegeven: $|BD| = 80$, $|CD| = 396$. Ook is gegeven: $|AD| = 165$ en $|AB| : |AC| = 25 : 33$. Gevraagd: $|AC|$, $|AB|$.



AE is een hoogtelijn. Er volgt: $|BD|^2 + |DE|^2 + |AE|^2 = |BD|^2 + |AD|^2 = 80^2 + 165^2 = 33625$.
Zie figuur 2. Er volgt: $33625 + opp(G + F) = |AB|^2$.

Uit de gegeven verhouding volgt dat $|AB|^2 : |AC|^2 = 625 : 1089$. Dus: $|AC|^2 = 1 \frac{464}{625} * |AB|^2$.

Nu worden alle oppervlaktes daarmee vergroot: $33625 * 1 \frac{464}{625} = 58588 \frac{1}{5}$.

De rechthoeken F en G zijn even groot. Hun breedte is samen 160.

Bij vergroting maar bij gelijkblijvende lengte komt dus bij die breedte erbij: $160 * \frac{464}{625} = 118 \frac{98}{125}$. [1]

Rechthoek L heeft de oppervlakte van wat er bij F en G samen bij komt.

Er is dus nu gevonden: $58588 \frac{1}{5} + opp(F + G + L) = |AC|^2$. (*)

Merk op: $|CD|^2 + |AE|^2 + |DE|^2 = 156816 + 27225 = 184041 = |CD|^2 + |AE|^2 + opp(M)$.

En: $|AC|^2 = |AE|^2 + |CE|^2 = |AE|^2 + |CD|^2 - opp(M + G + H + I)$.

Dus: $|AC|^2 = 184041 - opp(M) - opp(M + G + H + I)$. (**)

Kijk nu naar acht stukken achter elkaar gezet met dezelfde 'hoogte': [2]

L, F, G' : *breedte* = $118 \frac{98}{125} + 2 * 80 = 278 \frac{98}{125}$.

M, G, H : *breedte* = 396. En: I, M' : *breedte* = 396.

Deze stukken naast elkaar vormen een rechthoek met *breedte* = $1070 \frac{98}{125}$, en 'hoogte' $|DE|$.

Dus: $opp(L + F + G' + M + G + H + I + M')$ = $1070 \frac{98}{125} * |DE|$. (***)

Samenvattend eerst met (*) en (**):

$|AC|^2 = 58588 \frac{1}{5} + opp(F + G + L) = 184041 - opp(M) - opp(M + G + H + I)$.

Dus: $opp(F + G + L + M + G + H + I + M) = 125452\frac{4}{5}$. [3]

Met (***) volgt nu: $|DE| = 117\frac{27}{169}$. [4]

En hiermee: $|BE| = 197\frac{27}{169}$, $|EC| = 278\frac{142}{169}$...

en Cardinael schrijft nu dat deze lengten 'seer konstigh' gevonden zijn (!)

Met Pythagoras volgt verder: $|AB| = 228\frac{11}{13}$, $|AC| = 302\frac{1}{13}$.

En deze staan in verhouding 25 : 33.

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat foutief $118\frac{89}{125}$, ook in de figuur.

[2] Accenten zijn hier gebruikt i.v.m. plaatsing in figuur 2. Dat gebeurt in HGQ niet.

De stukken G en G' zijn even groot en M en M' zijn ook even groot.

[3] In HGQ staat foutief $125451\frac{4}{5}$.

[4] Bij de deling zijn de correcte getallen gebruikt. De fouten zijn blijkbaar zetfouten.

Met enige trigonometrie iets (?) eenvoudiger.

Benoem: $|AC| = 33x$, $|AB| = 25x$.

Dan volgt met de cos-regel: $(33x)^2 = 165^2 + 396^2 - 2 * 165 * 396 * \cos(\sphericalangle ADC)$.

En ook: $(25x)^2 = 165^2 + 80^2 - 2 * 165 * 80 * \cos(\sphericalangle ADB)$.

Er geldt: $\cos(\sphericalangle ADB) = \cos(180^\circ - \sphericalangle ADC) = -\cos(\sphericalangle ADC)$.

Gevolg: $\frac{(165^2 + 396^2 - (33x)^2)}{2 * 165 * 396} = \frac{(25x)^2 - 165^2 - 80^2}{2 * 165 * 80}$.

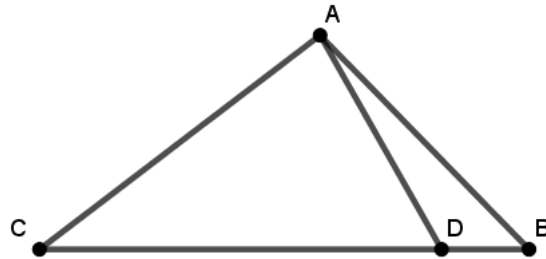
Dus: $80 * (165^2 + 396^2 - (33x)^2) = 396 * ((25x)^2 - 165^2 - 80^2)$.

Na uitwerking volgt:

$x^2 = \frac{14161}{169}$, $x = \frac{119}{13}$, $25x = 228\frac{11}{13} = |AB|$, $33x = 302\frac{1}{13} = |AC|$.

Q34 Zijden driehoek met verhoudingen 5

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is gegeven: $|AB| = 25$, $|AC| = 33$. Verder geldt: $|BD|:|CD| = 1:4\frac{19}{20}$ en $|BD|:|AD| = 1:2\frac{1}{16}$. Gevraagd: $|BC|, |AD|, |BD|, |CD|$.



Figuur 1

Nu wordt de aanpak van Q33 weer gevolgd.

Door de gegeven verhoudingen van $|BD|$, $|CD|$, $|AD|$ te gebruiken als lengten, zal volgen:

$$|AB| = 2\frac{179}{208}, |AC| = 3\frac{807}{1040}.$$

Maar $|AB| = 25$, dus alle lengten dienen met een factor $\frac{25}{2\frac{179}{208}} = 8\frac{88}{119}$ vergroot te worden.

Dan volgt:

$$|BD| = 8\frac{88}{119}, |CD| = 43\frac{31}{119}, |AD| = 18\frac{3}{119}, |BC| = 52.$$

Opmerking:

De aanpak met Q33 wordt aan de 'constlievende lezer' overgelaten en niet verder uitgewerkt.

Nu zal trigonometrie nauwelijks handiger blijken.

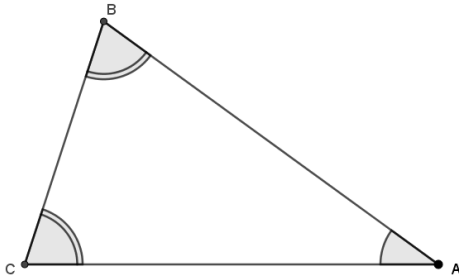
Noem $|BD| = x$. Dan volgt: $|CD| = 4\frac{19}{20}x$, $|AB| = 2\frac{1}{16}x$.

En verder met de cos-regel in $\triangle ACD$ en $\triangle ACB$. Dat geeft ook veel gereken.

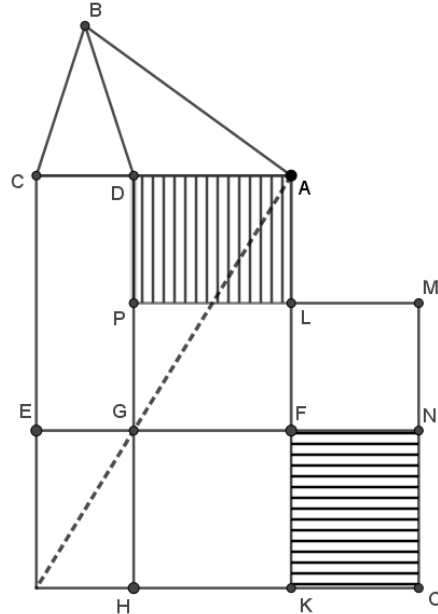
Cardinael neemt $|BD| = 1$, en dat is een handige keuze.

Q35 Middelevenredige 4

Zie figuur 1. Van $\triangle ABC$ is gegeven: $|AB| = |AC| = 10$. De hoek bij A is de helft van de hoek bij B en de helft van de hoek bij C . Gevraagd: $|BC|$.



Figuur 1



Figuur 2

BD in figuur 2 is een bissectrice. Daarmee volgt: $|BC| = |BD| = |AD|$ en $\triangle BCD$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$: de driehoeken zijn gelijkbenig met dezelfde basishoeken.

Er geldt: $opp(\text{vierkant } ACEF) = 100$. De lijn door A en G is een diagonaal in een rechthoek en dan volgt: $opp(DCEG) = opp(FGHK)$. [1] [2]

Er geldt namelijk: $|EG| : |GH| = |AC| : |AK| = |AD| : |AF| = |GF| : |GD|$.

Met lijn PL een middelloodlijn van AF volgt: $opp(FLPG) = opp(LADP)$.

Zie de figuur: $opp(LADP) = opp(FNOK)$. De gearceerde stukken zijn gelijk.

Dan volgt: $opp(\text{gnomon } PLFNOHP) = opp(ADHK) = opp(ACEF) = 100$.

Er geldt: $opp(MLFN) = |LF|^2 = 25$.

Dan volgt: $opp(\text{vierkant } MPHO) = 125$. Er daarmee: $|MP| = \sqrt{125}$.

Dus: $|AD| = |LP| = |MP| - |LM| = \sqrt{125} - 5$. En dat is ook $|BC|$.

Opmerkingen:

[1] Cardinael noemt rechthoek $DCEG$ een parallellogram. Correct, maar toch...

[2] Het betoog hierna hoeft eigenlijk niet want het is propositie 43 in boek I, Euclides.

$\triangle ABC$ is een driehoek met hoeken van $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$.

Punt D is het punt voor de gulden snede van AC . Zie ook Q25.

$\triangle BCD$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$ en hiermee volgt direct:

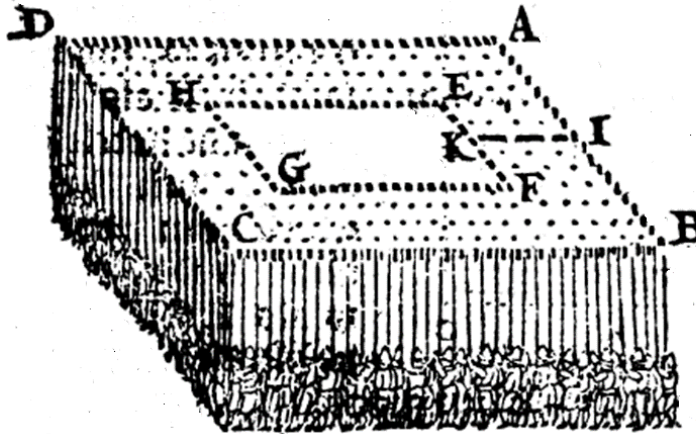
$$|BC| : |AB| = |CD| : |BC| = (|AC| - |AD|) : |BC|.$$

$$\text{Dus: } |BC|^2 = 10 * (10 - |BC|). |BC| = 5\sqrt{5} - 5.$$

Q36 Soldaten tellen in vierhoek 1

Zie figuur 1. [1] Dat is een vierkante opstelling van soldaten, in het midden 256 schutten [2], die omringd worden door 320 soldaten met lansen.

Gevraagd: De breedte van de band mannen met lansen.



Figuur 1

Gevraagd is dus $|KI|$ met een soldaat als eenheid.

In vierkant $ABCD$ staan in totaal $320 + 256 = 576$ soldaten, dus opgesteld 24 bij 24.

In het midden staan de schutten.

In dat vierkant $EFGH$ staan 256 soldaten, dus opgesteld 16 bij 16.

Er resteert voor de bandbreedte KI : 4.

Opmerking:

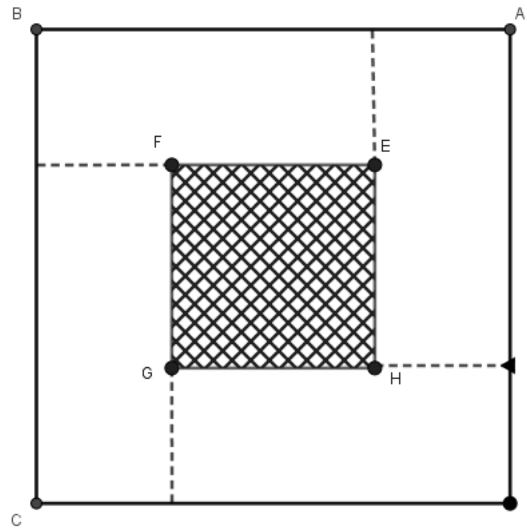
[1] Vanwege de mooie tekening hier een kopie uit HGQ.

[2] Schutten zijn 'stoppers', 'tegenhouders' (?)

Even een eenvoudige kwestie na de 'kunstigheden' van de vorige twee kwesties?

Q37 Soldaten tellen in vierhoek 2

Zie figuur 1. Een kapitein heeft 120 lansiers. Daarbij wil hij een aantal schutten zodat, als zij in een vierkante opstelling ('slaghoorde') staan, de lansiers de schutten omringen in een 'band' van 3 dik. Gevraagd is hoeveel schutten er nodig zijn.



Figuur 1

Noem de hele opstelling $ABCD$ en de schutten het vierkant $EFGH$. HI is dus 3 lansiers breed. Dat betekent dat in AI er 10 rijen van 3 zijn. Er zijn namelijk vier van zulke rij-opstellingen rondom de schutten. Dat betekent dat langs EH er nog 7 rijen lansiers staan. En dat geeft dus voor het aantal schutten 49. Zoveel zijn er dus nodig. [1]

Anders:

Met $|HI| = 3$. Dat geeft op de hoeken elk 9 lansiers, in totaal 36.

Er resteren nog 84 lansiers.

De vier stroken van rijen (3 breed) geeft dus samen 84.

Dus elk strook is 7 rijen: $84 = (4 * 3) * 7$.

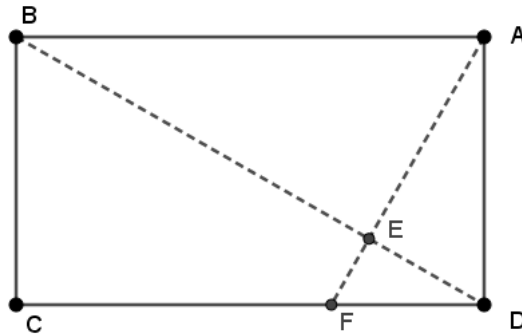
En voor het hele vierkant met schutten zijn er dus nodig: $7^2 = 49$.

Opmerking:

[1] Lansiers en schutten lijken evenveel plaats in te nemen...

Q38 Oppervlakte van vierhoek

Zie figuur 1. In deze rechthoek $ABCD$ staat lijn AF loodrecht te E op de diagonaal BD . Gegeven is: $|BE| = 16$, $|EF| = 2$. Gevraagd: $opp(ABCD)$.



Figuur 1

Uit gelijkvormigheid volgt: $|EF|:|DE| = |DE|:|AE|$. (*)

Te vinden zijn nu $|DE|$ en $|AE|$.

Er geldt: $|EF|:|BE| = 1:8$.

Ook uit gelijkvormigheid: $|BE|:|AE| = |AE|:|DE|$. (**)

Met $|EF| = 1$ volgt uit (*): $|DE|^2 = |AE|$.

En uit (**): $|AE|^2 = |BE| * |DE|$.

Combineer die relaties en er volgt: [1]

$$|DE|^3 = |BE| = 8 \text{ als dus } |EF| = 1.$$

Gevolg: $|DE| = 2$.

Echter feitelijk geldt: $|EF| = 2$, dan volgt: $|DE| = 4$ en $|AE| = 8$ uit (**).

Er volgt verder: $|BD| = |BE| + |DE| = 16 + 4 = 20$.

En: $opp(ABCD) = 160$. [2]

Anders:

Maak $|FE|^2 = 4$. En dan: $4 * |BE| = 64$. En dus $\sqrt[3]{64} = 4 = |DE|$ als boven. [3]

Opmerkingen:

[1] Er geldt namelijk: $|DE|^2 * |DE|^2 = |AE|^2 = |BE| * |DE|$.

[2] De tussenstappen worden aan de lezer gelaten:

$$|AB|^2 = 16^2 + 8^2 = 320, |AD|^2 = 8^2 + 4^2 = 80, |AB| * |AD| = \sqrt{25600}.$$

[3] Mogelijk is hier de volgende route gevolgd.

Met gelijkvormigheid volgt: $|EF|:|DE| = |AE|:|BE|$.

Dus: $|EF| * |BE| = |DE| * |AE|$.

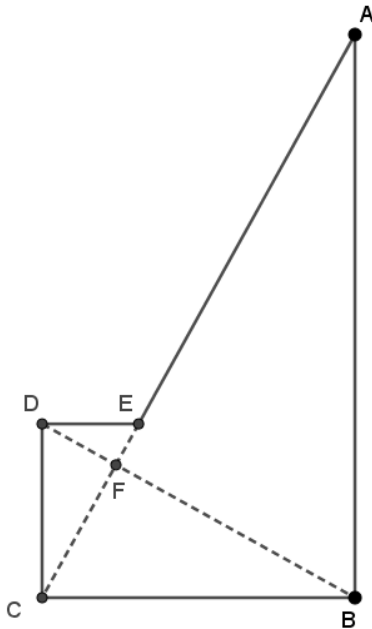
En dan: $|EF|^2 * |BE|^2 = |DE|^2 * |AE|^2 = |DE|^2 * |DE| * |BE|$ uit (**).

Dus: $|EF|^2 * |BE| = |DE|^3$.

In HGQ staat foutief als conclusie: $|BE| = 4$.

Q39 Oppervlakte veelhoek

Zie figuur 1. Voor dit vijfhoekig stuk land $ABCDE$ geldt dat de hoeken bij B, C en D recht zijn en BD loodrecht staat op CE , en $|AE| = 30$, $|EF| = 2$. Gevraagd: de oppervlakte van de vijfhoek.



Figuur 1

Uit gelijkvormigheid volgt:

$$|DF| : |FE| = |FA| : |FB|.$$

$$\text{Dus: } |FA| * |FE| = |DF| * |FB| = |FC|^2. (*)$$

Want $|FC|$ is de middelevenredige tussen $|DF|$ en $|FB|$. En er geldt: $|FA| = 32$.

$$\text{Gevolg: } |FC| = \sqrt{32 * 2} = 8.$$

Ook $|DF|$ is een middelevenredige nu tussen $|FC|$ en $|FE|$. Dus: $|DF| = \sqrt{8 * 2} = 4$.

$$\text{Uit (*) volgt verder: } |FB| = \frac{64}{4} = 16.$$

Tenslotte:

$$opp(ABCDE) = opp(\Delta ABC) + opp(\Delta CDE).$$

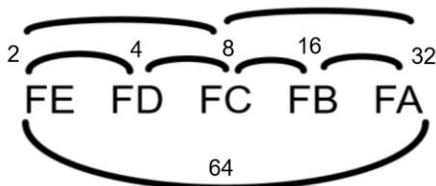
$$opp(ABCDE) = \frac{1}{2} |AC| * |FB| + \frac{1}{2} |CE| * |DF|.$$

En dat geeft dan: 340. [1]

Anders:

$$\text{Met } |FE| : |FA| = 1 : 16. [2]$$

In HGQ staan nu de lijnstukken op een rij, met tussen twee steeds de middelevenredige daarvan. Dit volgt dan uit de gelijkvormigheid van diverse driehoeken in deze vijfhoek.



Daarmee zijn alle lengten bekend.
En daarmee dus de oppervlakten.

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat foutief: 360.

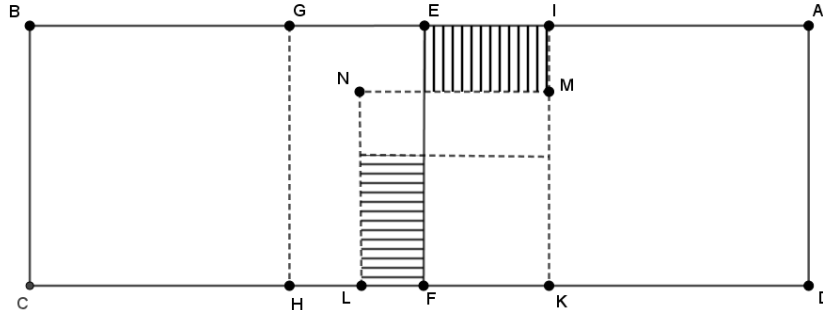
$$|AC| = 30 + 2 + 8 = 40. \text{ Dus de som is: } \frac{1}{2} * 40 * 16 + \frac{1}{2} * 10 * 4 = 340.$$

[2] Het lijkt alsof hier $|FE|$ even als beginterm van een meetkundige rij genomen wordt.

Voor zo'n rij $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots$ geldt inderdaad dat een term de middelevenredige is van de voorgaande en de opvolgende term. Hier dus: $a = 1$ en $r = 2$.

Q41 Zijden rechthoek berekenen 2

Zie figuur 1. Voor rechthoek $ABCD$ geldt: $|AB| = 3 * |AD|$. Als $|AB|$ korter zou zijn, zeg 18, dan zou gelden: $opp(ABCD) = 120$. Gevraagd: $|AB|, |BC|$.



Figuur 1

G en I delen AB in drie gelijke stukken. Dus: $|GI| = |AD|$. [1]

Gevolg: $opp(\text{vierkant } IGHK) = \frac{1}{3} opp(ABCD)$.

Zij E zo gelegen dat $|GE| = \frac{18}{3} = 6$. [2]

Daaruit: $opp(IEFK) = \frac{120}{3} = 40$. [3]

En: $|FL| = 3$.

Dus: $opp(\text{vierkant } MNLK) = 40 + 3^2 = 49$. [4]

Dus: $|KL| = 7$. [5]

En daarmee: $|IK| = |MK| + |IM| = |KL| + |FL| = 10$.

Dus: $|AD| = 10, |AB| = 30$.

Opmerkingen:

De stappen in HGQ zijn zo te begrijpen en laten meteen een algebraïsche aanpak zien.

[1] Benoem eerst: $|AD| = |GI| = x, |AB| = 3x$.

Dus er geldt: $(3x - 18) * x = 120$.

Ofwel: $(x - 6) * x = 40$.

[2] Het getal 18 wordt verdeeld over de drie vierkanten van $ABCD$.

Er volgt: $|GI| - |GE| = |EI| = x - 6$.

[3] $opp(IEFK) = |EI| * |EF| = (x - 6) * x = 40$.

[4] Dit wordt: $x^2 - 6x + 9 = 49$.

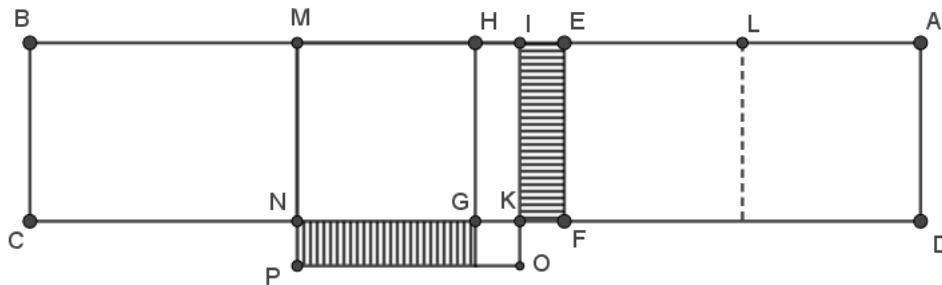
En: $opp(\text{vierkant } MNLK) = x * (x - 6) + 9 = (x - 3)^2 = 49$.

Dit oplossen is wat meetkundig hierboven staat.

[5] Dus: $|KL| = x - 3 = 7$.

Q42 Zijden rechthoek berekenen 3

Zie figuur 1. Voor rechthoek $ABCD$ geldt: $|AB| = 40$. Lijn EF verdeelt de rechthoek in twee delen zodat geldt: $opp(EFCB) = 192$. Verder geldt: $|BE| > |AE|$, $|AE| = 2 * |AD|$.
 Gevraagd: $|AD|$.



Figuur 1

Het midden van AE is L . Het midden van BE is M .

Dus: $|LM| = 20$.

En: $opp(EMNF) = \frac{192}{2} = 96$.

Verder: $|IM| = \frac{1}{2} |LM| = 10$. [1]

Dan volgt: $opp(IMPO) = |IM|^2 = 100$.

En nu volgt: $opp(IMPO) - opp(EMNF) = 4 = |GK|^2$.

En er geldt nu: $|GK| = |IH| = 2$.

Dus: $|HM| = |IM| - |IH| = 8$.

En dit is ook $|AD|$.

Opmerkingen:

[1] Punt I ligt midden tussen L en M .

En in de figuur ligt E dan tussen I en L en de tekening als hierboven is te maken.

Dit lukt alleen als $|BE| > |AE|$ zoals gegeven. De redenering leunt sterk op de tekening.

Als $|BE| < |AE|$ dan ligt I tussen E en L en de figuur klopt niet meer. Maar zie ook Q43...

NB: $|BE| = |AE|$ zou tot strijdigheden in de gegevens leiden, want dan zou volgen:

$|AE| = |BE| = 20$, $|AD| = 10$, $opp(EFCB) = 200$.

Een algebraïsche aanpak leidt naar twee antwoorden.

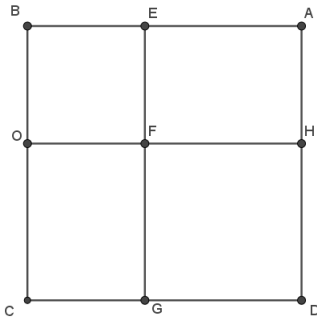
Met $|AD| = x$ en $|AE| = 2x$ volgt: $(40 - 2x) * x = 192$.

Dat geeft: $x^2 - 20x + 96 = (x - 8)(x - 12) = 0$.

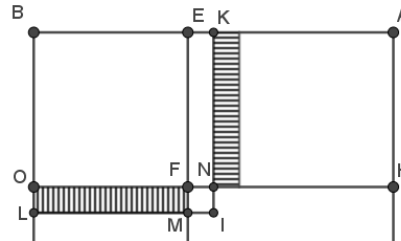
De voorwaarde $|BE| > |AE|$ betekent: $x < 10$. Dus nu voldoet alleen: $x = 8$.

Q44 Oppervlakte binnen oppervlakte

Zie figuur 1. In het vierkant $ABCD$ met $|AB| = 70$ zijn twee vierkanten getekend namelijk $EBOF$ en $HFGD$. Hun oppervlakte samen is 2500. Gevraagd: $opp(EBOF)$, $opp(HFGD)$.



Figuur 1



Figuur 2

De rechthoeken $AEFH$ en $FOCG$ zijn even groot, elk met oppervlakte: $\frac{70^2 - 2500}{2} = 1200$.

Met K in figuur 2 het midden van AB volgt: $opp(\text{vierkant } KBLI) = 35^2 = 1225$.

En minus de oppervlakte van $AEFH$ resteert: $opp(\text{vierkant } NFMI) = 25$.

Dus: $5 = |MI| = |EK|$.

Dus: $|BE| = 35 - 5 = 30$. En: $|AE| = 40$.

Hieruit volgt: $opp(EBOF) = 30^2 = 900$, $opp(HFGD) = 1600$.

Anders:

In HGQ volgt: $opp(AEFD)$ is de middelevenredige van de oppervlakten van de vierkanten. [1]

En dan deze stappen:

$$[2] \left(\frac{2500}{2}\right)^2 = \frac{6250000}{4} = 1562500. [3]$$

$$[4] 1200^2 = 1440000. \text{ Afgetrokken van het vorige getal geeft: } 122500.$$

$$[5] \text{ De wortel hiervan: } 350. \text{ En hierbij geteld: } \frac{2500}{2} = 1250. \text{ Dit geeft: } 1600.$$

Dit is $opp(HFGD)$.

En dan volgt: $opp(EBOF) = (70 - 40)^2 = 900$.

Opmerkingen:

[1] Cardinael verwijst nu naar Q5 om de zijden te berekenen. De stappen worden hierna meer algebraïsch opgeschreven. Benoem: $|DH| = a$, $|AH| = b$. En inderdaad geldt $a^2 : ab = ab : b^2$.

$$[2] \text{ Hier staat: } \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2.$$

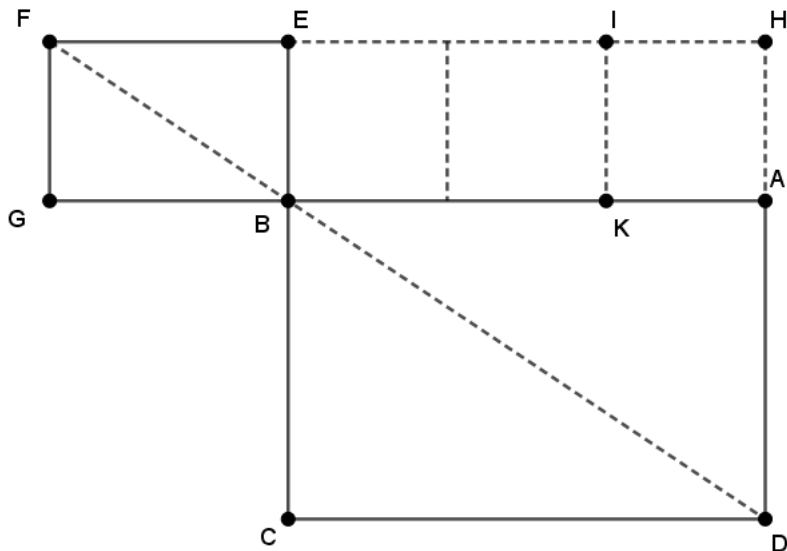
[3] In HGQ staat foutief de waarde: **1500125**.

$$[4] \text{ Hier staat: } (ab)^2. \text{ Er volgt: } \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 - a^2 b^2 = \left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2.$$

$$[5] \text{ Hier staat: } \frac{(a^2 - b^2)}{2} + \frac{(a^2 + b^2)}{2} = a^2.$$

Q45 Zijden rechthoek berekenen 5

Zie figuur 1. Daar staan de gelijkvormige rechthoeken $ABCD$ ($opp = 96$) en $EFGB$ ($opp = 24$). Er geldt verder: $|AB| = 3 * |BE|$. Gevraagd zijn de afmetingen van de twee rechthoeken.



Figuur 1

Er geldt: $opp(ABEH)$ is de middelenredige van de gegeven oppervlakten. [1]

Dus: $opp(ABEH) = \sqrt{96 * 24} = 48$.

In de figuur te zien: AB is in drie gelijke vierkanten verdeeld want $|AB| = 3 * |BE|$.

Dus: $opp(HIKA) = 16$.

En dus: $|HA| = 4$.

En hiermee volgt: $|BE| = 4$, $|AB| = 12$.

En verder: $|BG| = \frac{24}{4} = 6$, $|BC| = \frac{96}{12} = 8$.

Opmerking:

[1] Kort algebraïsch genoteerd:

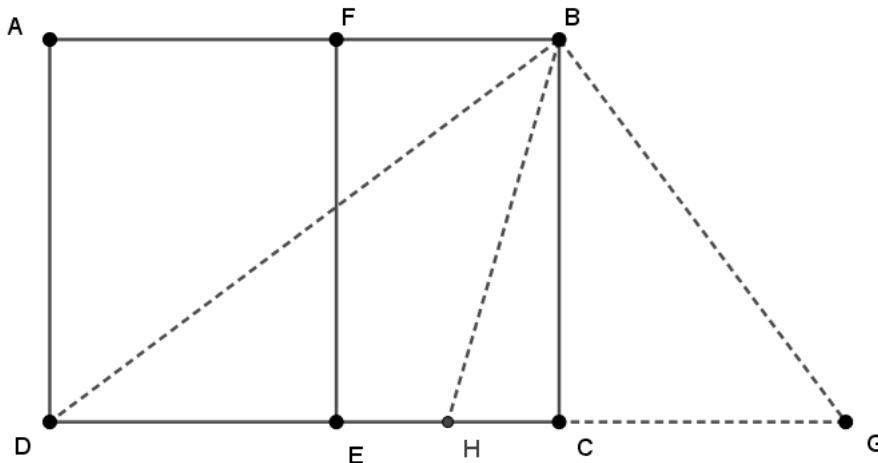
$|BE| = a$, $|BG| = b$, $|BC| = \lambda a$, $|AB| = \lambda b$. Zo zijn de rechthoeken gelijkvormig.

En er geldt: $(a * b) : (a * \lambda b) = (a * \lambda b) : (\lambda a * \lambda b)$.

Dus: $opp(EFGB) : opp(ABEH) = opp(ABEH) : opp(ABCD)$.

Q46 Zijden rechthoek berekenen 6

Zie figuur 1. In rechthoek $ABCD$ is lijn EF zodanig dat rechthoek $AFED$ gelijkvormig is met $ABCD$. Verder is gegeven: $|AD| = 24$, $opp(FBCE) = 336$. Gevraagd: $|AB|$.



Figuur 1

$$|EC| = \frac{opp(BFEC)}{|BC|} = \frac{336}{24} = 14.$$

Maak: $|CG| = |DE|$.

H is het midden van DG en dus ook van EC . Dus: $|HC| = 7$.

$|DE|:|AD| = |AD|:|CD|$, want de twee rechthoeken zijn gelijkvormig.

Dus ook geldt:

$$|CG|:|BC| = |BC|:|CD|.$$

Hieruit volgt:

$\triangle BCG$ is gelijkvormig met $\triangle DBG$, want zij hebben ook nog hoek G gemeenschappelijk.

Dus: *hoek* DBG is recht. (*)

$$\text{En dan: } |HB| = \sqrt{|HC|^2 + |BC|^2} = \sqrt{49 + 576} = 25.$$

Dus ook: $|HD| = 25$. [1]

En dus: $|CD| = 25 + 7 = 32$.

Opmerkingen:

[1] Hier wordt de stelling van Thales gebruikt. Die geldt vanwege (*).

Dit is ook propositie 31 in boek III, Euclides.

Algebraïsch: Noem $|AB| = x$, $|AF| = y$.

Dan volgt eerst $y : 24 = 24 : x$.

$$\text{Dan: } 24x - 336 = 24y = 24 * \left(\frac{24^2}{x}\right).$$

$$\text{Uitgewerkt: } x^2 - 14x - 576 = 0 = (x + 18)(x - 32).$$

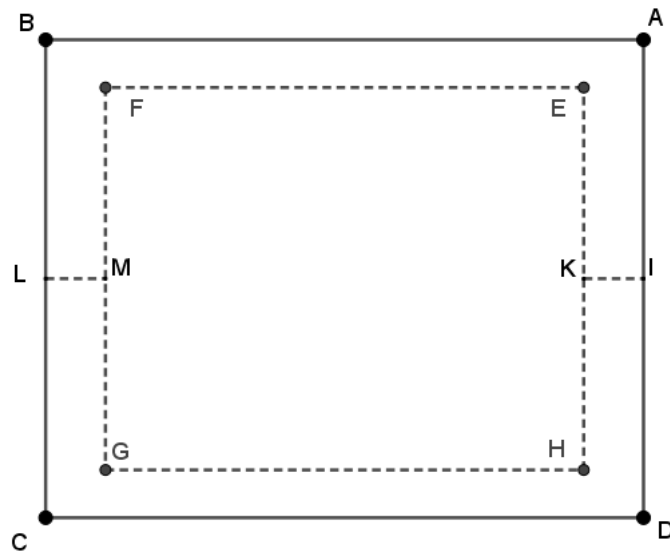
Dus: $|CD| = |AB| = x = 32$.

Q47 Berekening afmeting tuin

Zie figuur 1. Dat is een rechthoekige tuin $ABCD$ met oppervlakte 180. Daarbinnen ligt een rechthoekig perk $EFGH$ met oppervlakte 80. Dit perk is gelijkvormig met de tuin.

Er geldt: $|EF| = |AB| - 5$, zodat $|IK| = |LM| = 2\frac{1}{2}$.

Gevraagd zijn de afmetingen van de tuin.



Figuur 1

De twee rechthoeken zijn gelijkvormig.

Dan volgt: $\sqrt{\frac{180}{80}} = 1\frac{1}{2}$. [1]

En met: $1\frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ volgt:

$\frac{1}{2} : 5 = 1 : |HG|$. [2]

En hiermee: $1 : 10 = 1 : |HG|$, dus: $|HG| = 10$.

En: $|CD| = |HG| + 5 = 15$.

Dus: $|AB| = \frac{180}{15} = 12$.

Opmerkingen:

[1] Dit is de vergrotingsfactor tussen de zijden van het perk en die van de tuin.

[2] Ongeveer met deze redenering:

$|AB| = 1\frac{1}{2}|EF| = |EF| + 5$. Dus: $\frac{1}{2}|EF| = 5$. En $|HG| = |EF|$.

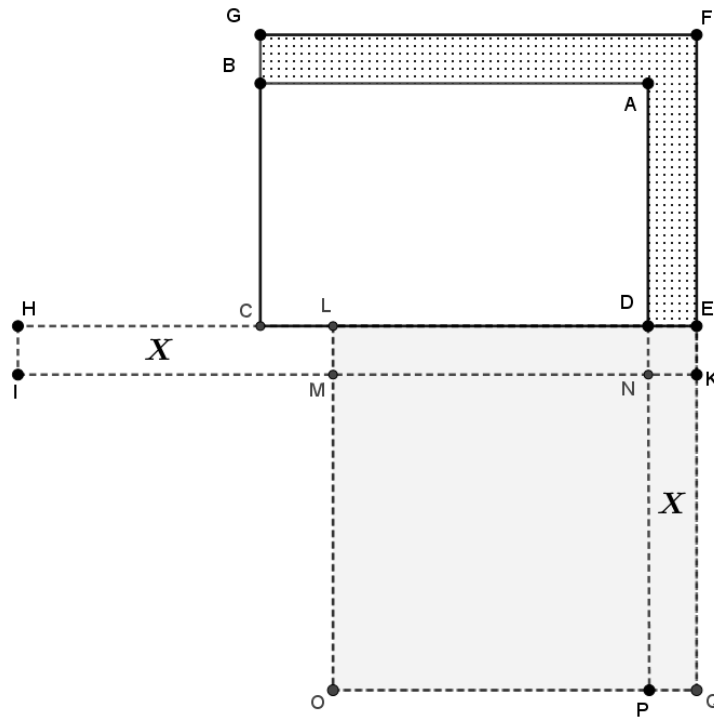
Q48 Berekening afmeting gracht

Zie figuur 1. Bij een rechthoekig hof $ABCD$ dient een gracht te komen, hier aangeduid met $DABGFE$.

Gegeven is: $|AB| = 16$, $|BC| = 10$, $|DE| = |BG|$, $opp(gracht) = 120$.

De gracht is dus langs de zijden overal even breed.

Gevraagd: $|DE|$.



Figuur 1

In de figuur geldt: $|CH| = |AD|$. Dus: $|DH| = 26$.

En: $|EK| = |DE|$.

Dan volgt: $opp(EHIK) = opp(gracht) = 120$.

Punt L is het midden van DH .

Dus: $|DL| = 13$.

Met de stukken X gelijk volgt: $opp(gnomon PQELMN) = 120$.

En ook: $opp(NPOM) = 169$.

Gevolg: $opp(ELOQ) = 289$.

Dus: $|EQ| = 17$, $|KQ| = 13$, $|EK| = 4 = |DE|$.

Opmerking:

In feite gaat het algebraïsch niet veel anders. Noem: $|DE| = x$.

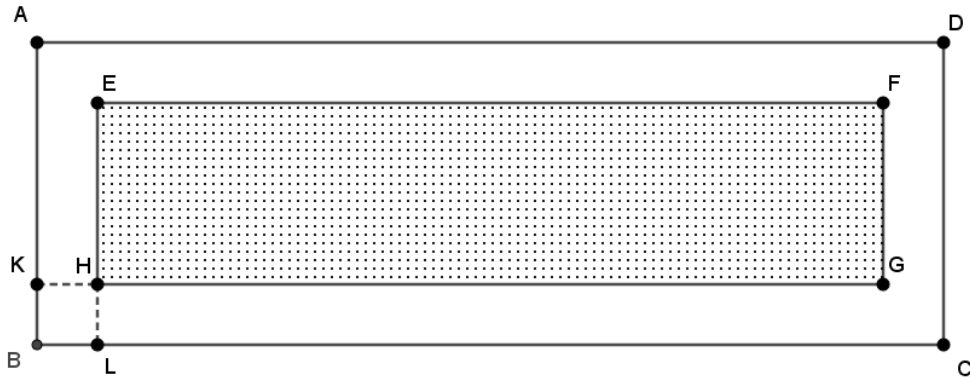
Dan volgt: $(x + 10)(x + 16) - 160 = 120$.

Ofwel: $x^2 + 26x = 120$. Dit oplossen is wat meetkundig hierboven staat.

Dus: $(x + 13)^2 = 289$. Er volgt: $|DE| = x = 17 - 13 = 4$.

Q49 Soldaten tellen in vierhoek 3

Zie figuur 1. Hier staan soldaten in een rechthoekige opstelling. De opstelling ('slaghoorde') is driemaal zo lang als breed. Schutten, in totaal 576, staan buitenom in rijen van vier man breed en zij omringen lansiers. Gevraagd is het aantal lansiers.



Figuur 1

In zo'n vierkant $KHLB$ staan 16 soldaten.

De schutten zijn zo te tellen met $|HK| = |BK| = 4$:

$$4(|AB| - 4) + 4(|CD| - 4) + 4(|AD| - 4) + 4(|BC| - 4) = 576.$$

$$\text{Dus: } 4(|AB| + |CD| + |AD| + |BC|) = 576 + 4 * 16 = 640.$$

$$\text{Er volgt nu: } |AB| + |BC| = \frac{640}{4} / 2 = 80.$$

(*) Er is gegeven dat $|AB| : |BC| = 1 : 3$. Samen 4.

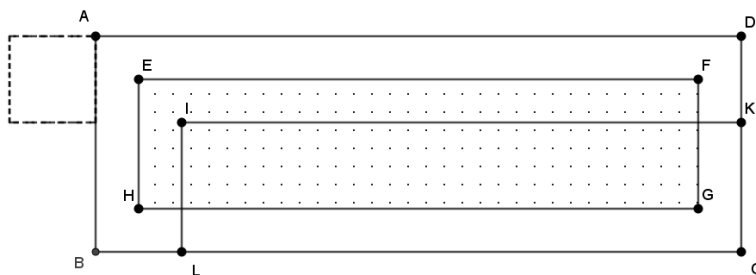
$$\text{Dus: } 4 : 80 = 1 : |AB|.$$

$$\text{Gevolg: } |AB| = 20, |BC| = 60.$$

In totaal dus 1200 soldaten: 576 schutten en 624 lansiers.

De opstelling van de lansiers is 12 bij 52.

Anders:



Figuur 2

Zie figuur 2.

Maak $|BL| = |DK| = 8$.

Dan volgt dat de rechthoeken $EFGH$ en $IKCL$ even groot zijn.

Het aantal soldaten in gnomon $ABLIKD$ is dus nu 576: het aantal schutten.

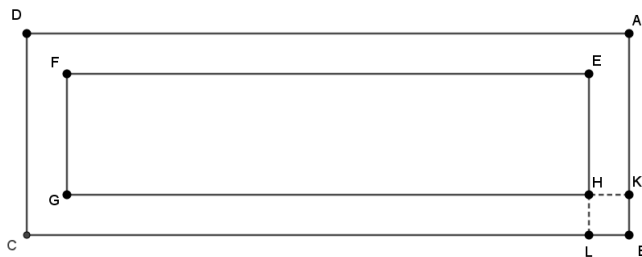
$$\text{Dus: } 8 * |AD| + 8 * (|AB| - 8) = 576.$$

$$\text{En dan: } |AD| + |AB| = \frac{576}{8} + 8 = 80.$$

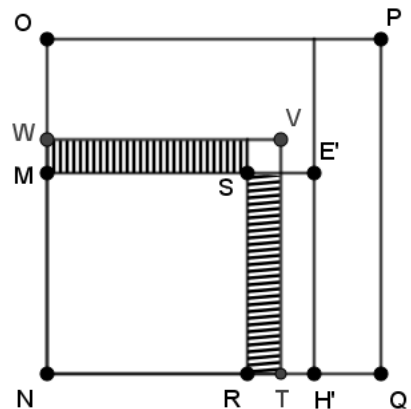
Verder vanaf (*) met $|AD| = |BC|$ en er volgt: $|AB| = 20, |BC| = 60$.

Q50 Soldaten tellen in vierhoek 4

Een veldheer heeft een rechthoekige opstelling gemaakt, driemaal zo lang als breed. De lansiers zijn omringd door rijen schutten, vier man breed. Er zijn 624 lansiers. Gevraagd is het aantal schutten.



Figuur 1



Figuur 2

Zie figuur 1. In het binnenste stuk staan de 624 lansiers.

Te vinden zijn eerst: $|AB|$, $|BC|$.

Het derde deel van $EFGH$ is 208.

Zie nu figuur 2. Daarin is dit derde deel ook rechthoek $E'H'NM$.

Het derde deel van $ABCD$ is het vierkant $QPON$.

Dus: $|MO| = 8$.

En: $|H'Q| = 2\frac{2}{3}$. Want $|MO| = 2 * |BK|$ (zie figuur 1).

Vierhoek $RNMS$ is een vierkant.

Dus: $|H'R| = 5\frac{1}{3}$. En daarmee: $|TH'| = |TR| = 2\frac{2}{3}$.

Het vierkantje bij V heeft dus oppervlakte: $\left(2\frac{2}{3}\right)^2 = 7\frac{1}{9}$.

Gevolg: $opp(TVWN) = 208 + 7\frac{1}{9} = 215\frac{1}{9} = \left(14\frac{2}{3}\right)^2$.

Dus: $|TN| = 14\frac{2}{3}$.

En daarmee: $|NQ| = |NT| + |TH'| + |H'Q| = 20$.

En dan ook: $20 = \frac{1}{3}|BC|$.

Dus: $|BC| = 60$, $|AB| = 20$.

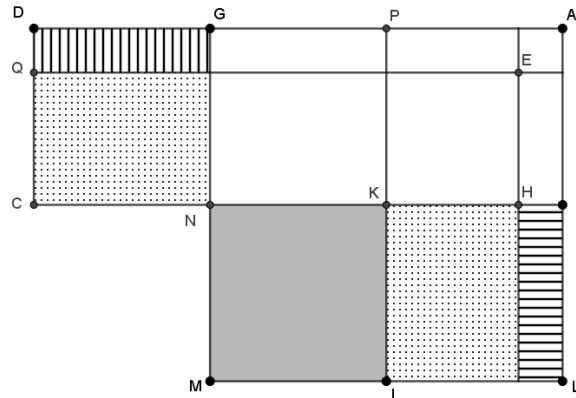
Opmerking:

Het antwoord op de vraag wordt niet gegeven in HGQ maar volgt simpel: $1200 - 624 = 576$.

Hiermee is deze situatie dus feitelijk hetzelfde als in de vorige kwestie.

Q51 Soldaten tellen in vierhoek 5

Zie figuur 1. Van een opstelling is bekend is dat er 576 schutten zijn en dat die, vier man breed, 624 lansiers omringen ('beringhelen'). De totale opstelling vormt een rechthoek $ABCD$. [1]
De verhouding $|AB| : |AD|$ is onbekend. Gevraagd: $|AB|, |AD|$.



Figuur 1

Zie hier rechthoek $EQCH$ als de 'verplaatste' opstelling van de lansiers en met de schutten in het gnomon $ADQEHB$. Het stuk $GDCN$ wordt weggehaald en verplaatst zodat $BKIL$ ontstaat.

Nu geldt dat $GALM$ een vierkant is. [2]

En: $|AL| = |AG| = 40$. [3]

Dus: $opp(GALM) = 1600$. Alle soldaten samen geeft 1200.

Dus dat geeft voor het verschil: $opp(vierkant KNMI) = 400$. [4]

Gevolg: $|IK| = 20 = |BL|$.

Dus: $|AB| = |AL| - |BL| = 20$.

En: $|AD| = |AG| + |DG| = 60$.

Opmerkingen:

[1] Dat wordt niet gemeld in HGQ. De kwestie past in het rijtje van Q49 en Q50 en mogelijk daarom is de opstelling bekend verondersteld.

[2] De grootte van GD staat niet in woorden in HGQ, maar volgt min of meer uit de figuur:

Met $|AP| = |AB|$ en G het midden van DP volgt: $|GD| = \frac{1}{2}(|AD| - |AB|)$.

En dan volgt: $|AG| = |AD| - |GD| = \frac{1}{2}(|AD| + |AB|) = |AB| + |GD| = |AD|$.

[3] Dit volgt nu snel. In feite heeft Cardinael dit ook al eens bij Q49 gedaan, dus nu niet opnieuw.

Als de rij schutten wordt geteld, dan geeft dat met $|HB| = |DQ| = 8$:

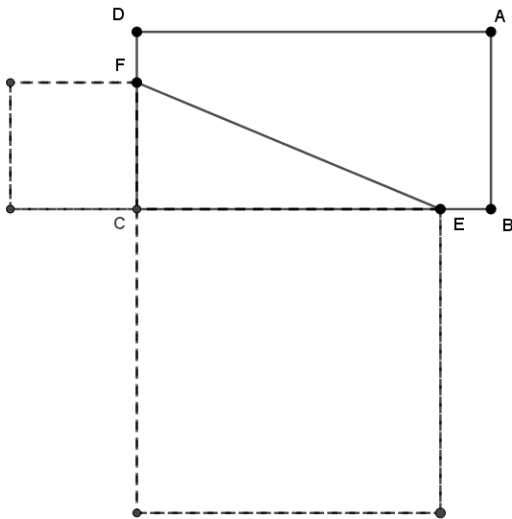
$$(8 * |AD| + 8 * (|AB| - 8)) = 576.$$

Dus: $|AD| + |AB| = \frac{576}{8} + 8 = 80 = |AG| + |AL|$.

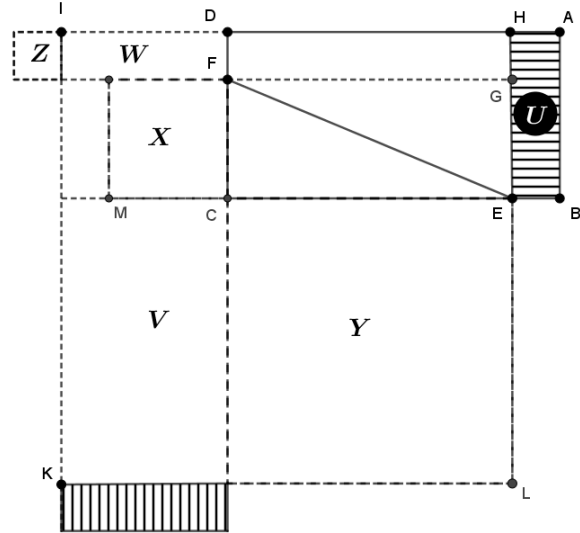
[4] Vierkant, want: $|GP| = |AG| - |AP| = \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|AB| - |AB| = \frac{1}{2}(|AD| - |AB|) = |BL|$.

Q52 Zijden rechthoek berekenen 7

Zie figuur 1. In een rechthoek $ABCD$ met oppervlakte 98 is een lijn EF getrokken met lengte 13. Verder geldt: $|DF| = |BE| = 2$. Gevraagd: $|AB|, |BC|$.



Figuur 1



Figuur 2

Er volgt nu: $opp(HIKL) = 13^2 + 2 * 98 - 4 = 361$. [1]

Dus: $|HI| = 19$.

En dan: $|ME| = |HI| - 2 = 17 = |CE| + |CF|$.

Omdat geldt: $|EF| = 13$ volgt nu met Q14: $|CE| = 12, |CF| = 5$. [2]

Daarmee volgt weer: $|AB| = |CD| = 5 + 2 = 7, |BC| = 12 + 2 = 14$.

De 'demonstratie' van dit werk is eenvoudig uit de figuur af te lezen [staat dan in HGQ].

Opmerkingen:

[1] Uit figuur 2 is veel af te lezen en daartoe zijn de letters in de veelhoeken toegevoegd.

Er volgt: $opp(HIKL) = o(X) + o(Y) + o(ABCD) - o(U) + o(V) + o(\text{gnomon bij } X)$.

Er geldt: $opp(X) + opp(Y) = |EF|^2$, met Pythagoras, zie figuur 1.

En: $opp(V) = opp(ABCD) - opp(U)$, en $opp(U) = opp(W)$.

En: $opp(\text{gnomon bij } X) = 2 * opp(W) - opp(Z)$.

Dus: $opp(HIKL) = |EF|^2 + 2 * opp(ABCD) - opp(Z)$.

[2] In Q14 wordt precies dit opgelost d.w.z. met dezelfde getallen.

Algebraïsch zou dit leiden naar twee kegelsneden.

Noem: $|AB| = x, |BC| = y$.

Dan volgt: $xy = 98; (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 13^2$.

De vergelijking van een hyperbool en een cirkel.

Hun snijpunten in het 1^e kwadrant zijn van belang: $(x, y) = (7, 14)$ of $(14, 7)$.

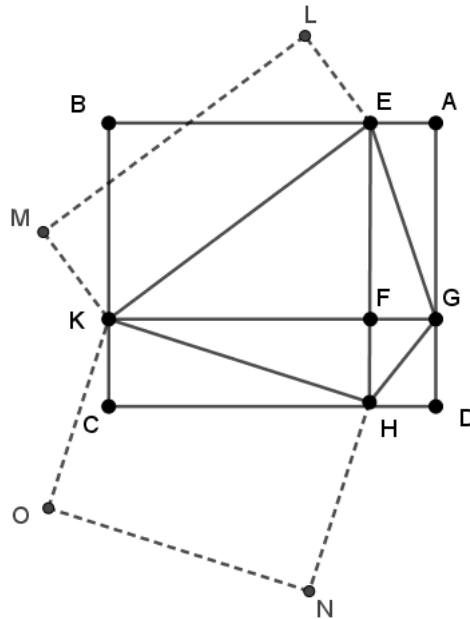
Op basis van figuur 1 volgt dan het antwoord.

Q53 Zijden rechthoek berekenen 8

Zie figuur 1. In rechthoek $ABCD$ zijn twee lijnen getrokken, EH en GK , evenwijdig aan de zijden zodanig dat er geldt $|FG|:|FH| = |EF|:|FK|$.

Verder is gegeven: $|AF| = \sqrt{90}$, $|DF| = 5$, $|CF| = \sqrt{160}$, $|BF| = 15$. [1]

Gevraagd: $opp(ABCD)$, $|AB|$, $|AD|$.



Figuur 1

Op EK wordt nu een rechthoek $EKML$ gezet gelijkvormig met $AEFG$ of $FKCH$. [2]

Dan geldt: $opp(EKML) = opp(AEFG) + opp(FKCH)$.

Zo'n rechthoek bestaat volgens propositie 31, boek VI, Euclides.

Er geldt ook: $|EK|^2 = |EF|^2 + |FK|^2$.

En hieruit volgt, met verhoudingen tussen de rechthoeken: [3]

$opp(ELMK) = 75 = |EL| * 15$. Dus: $|EL| = 5$.

Analoog:

Nu wordt nu op KH een rechthoek gezet gelijkvormig met $EBKF$ of $GFHD$.

Dan geldt: $opp(KHNO) = opp(EBKF) + opp(GFHD)$.

Er geldt ook: $|KH|^2 = |KF|^2 + |FH|^2$.

En analoog aan de redenering hierboven volgt: [4]

$opp(KHNO) = 120 = |KO| * \sqrt{160}$. Dus: $|KO| = \sqrt{90}$.

Gevolg: $opp(ABCD) = 120 + 75 = 195$.

Nu de afmetingen van de rechthoek. [5]

$|EK|^2 + |HG|^2 = 225 + 25 = 250$.

$opp(EBKF) + opp(GFHD) = 120$.

Verdeel dit in de verhouding $25 : 225$ en dat geeft dan $12 : 108$.

Dus: $opp(EBKF) = 12$, $opp(GFHD) = 108$. [6]

Analoog:

$|KH|^2 + |EG|^2 = 160 + 90 = 250$.

$$\text{opp}(AEFG) + \text{opp}(FKCH) = 75.$$

Verdeel dit in de verhouding 90 : 160 en dat geeft dan 27 : 48.

$$\text{Dus: } \text{opp}(AEFG) = 27, \text{ opp}(FKCH) = 48.$$

Als nu geldt: $|FG| = 1$, dan volgt: $|FE| = 3$ (en daarmee: $\text{opp}(AEFG) = 3$).

$$\text{Gevolg: } |FG| = \sqrt{\frac{27}{3}} = 3. [7]$$

$$\text{En dan: } |FH| = 4, |FK| = 12, |FE| = 9, |AB| = 15, |BC| = 13.$$

Anders:

Neem nu $|FG| = 1$. Dan volgt: $|EF| = 3, |HF| = 1\frac{1}{3}, |FK| = 4$.

$$\text{En: } |EH| = 4\frac{1}{3}, |GK| = 5.$$

$$\text{Dus: } |EH| * |GK| = 21\frac{2}{3}. \text{ En: } |EH|^2 = 18\frac{7}{9}, |GK|^2 = 25.$$

Maar: $21\frac{2}{3}$ moet zijn 195 (= $\text{opp}(ABCD)$). [8]

$$\text{Dus: } |EH|^2 \text{ moet zijn } 9 * 18\frac{7}{9} = 169.$$

$$\text{En: } |GK|^2 \text{ moet zijn } 9 * 25 = 225.$$

$$\text{En daarmee volgt: } |EH| = |BC| = 13, |GK| = |AB| = 15.$$

Opmerkingen:

[1] Opmerkelijk in HGQ: in de figuur zijn precies de vier andere diagonalen getekend.

[2] Uit het gegeven volgt: $|FG| : |EF| = |FH| : |FK|$. Hieruit volgt dat de twee rechthoeken $AEFG$ en $FKCH$ gelijkvormig zijn.

[3] De aanpak in HGQ gaat met verhoudingen maar is niet heel duidelijk. Hier iets anders gedaan.

Kort genoteerd: $|FG| = a, |FH| = b$. Dan volgt: $|EF| = \lambda a, |KF| = \lambda b$.

$$\text{En dan: } |EF|^2 + |KF|^2 = |KE|^2 = 15^2 = (\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = \lambda^2(a^2 + b^2) = \lambda^2 * 25. \text{ Dus: } \lambda = 3.$$

$$\text{En dan: } \text{opp}(EKML) = |EF| * |FG| + |KF| * |FH|.$$

$$\text{Dus: } 15 * |EL| = 3a * a + 3b * b = 3(a^2 + b^2) = 3 * 5^2 = 75.$$

$$\text{Dus: } |EL| = 5.$$

[4] Met de notatie van [3]:

$$\text{opp}(HKON) = |EB| * |EF| + |FG| * |FH| = \lambda^2 ab + ab = 10ab = |KO| * \sqrt{160}.$$

$$\text{En in } \Delta AEG \text{ resp. } \Delta KFH: a^2 + 9a^2 = 90, b^2 + 9b^2 = 160. \text{ Dus: } a = 3, b = 4. \text{ Etc.}$$

$$\text{[5] Met de aanpak in [4] is dit nu al bekend: } |AB| = a + \lambda b = 15, |BC| = b + \lambda a = 13.$$

[6] De gevonden factor in de verhouding is 9 en dan is dus hier geschreven λ^2 , zie [3].

[7] Hier staat dat de feitelijke oppervlakte 9 maal groter is, dus de zijden zijn $\sqrt{9}$ maal groter.

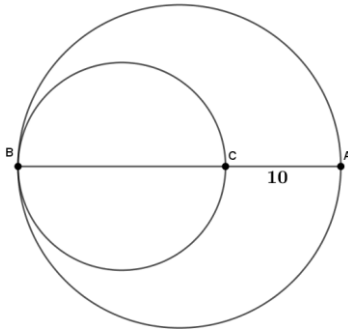
$|FG|$ wordt hier als een variabele gezien, gesteld te zijn 1, anders een veelvoud hiervan...

[8] Hier zit dus een factor 9 tussen en daarmee ook tussen de kwadraten.

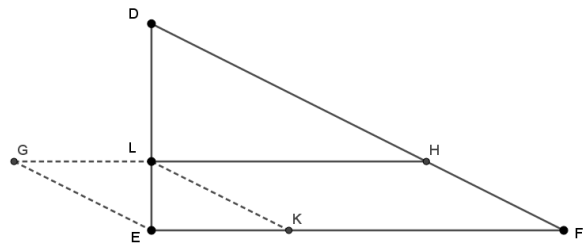
Q54 Straal van cirkel 1

Zie figuur 1. Binnen een cirkel met diameter AB ligt een andere cirkel met diameter BC . Er geldt: $|AB| = |BC| + 10$. En verder is het verschil van de oppervlaktes $361\frac{3}{7}$. [1]

Gevraagd: $|AB|, |BC|$.



Figuur 1



Figuur 2

Uit de leerstellingen van Archimedes is de verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel bekend nl. $7 : 22$. [2]

Zie nu figuur 2. In de rechthoekige $\triangle DEF$ geldt: $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$.

De omtrek van de cirkel met diameter AB is $|EF|$.

Dus volgt: $|DE| : |EF| = 3\frac{1}{2} : 22$.

In de figuur geldt verder: $|EL| = \frac{1}{2}(|AB| - |BC|) = 5$.

Dan volgt: $opp(\triangle ELHF) = 361\frac{3}{7}$. [3]

Verder: $|DE| : |EF| = 3\frac{1}{2} : 22 = |EL| : |EK|$. Dus met $|EL| = 5$ volgt: $|EK| = 31\frac{3}{7}$.

Dus: $opp(\triangle LEK) = \frac{1}{2}|EL| * |EK| = 78\frac{4}{7}$. Dit is ook $opp(\triangle ELG)$.

Dan volgt: $opp(\triangle EGHF) = 78\frac{4}{7} + 361\frac{3}{7} = 440$

Dus: $|EF| = \frac{440}{|EL|} = 88$. Dit is de omtrek van de cirkel met diameter AB .

En dan volgt: $|AB| = 28, |BC| = 18$. [4]

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat foutief $361\frac{3}{4}$. Een duidelijke zetfout blijkt verder.

[2] Archimedes weet al dat dit een benadering is van die verhouding. Dat staat niet in HGQ.

Cardinael gebruikt 'gewoon': $\pi = \frac{22}{7}$. Dat pi geen rationaal getal is, is pas in de 18^e eeuw bewezen.

[3] Want er geldt: $opp(\triangle DEF) = \frac{1}{2} * |DE| * |EF| = \frac{1}{2} * \frac{|AB|}{2} * \frac{22}{7} * |AB| = \frac{1}{4} * \frac{22}{7} * |AB|^2$.

En inderdaad geldt voor een cirkel met diameter d : $opp = \frac{\pi}{4}d^2$

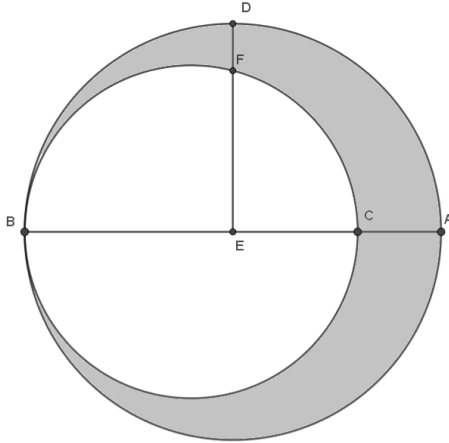
[4] Er geldt namelijk: $88 = \frac{22}{7}|AB|$.

Om $|AB| = 28$ te krijgen bij rekenen met π zou het verschil in oppervlaktes moeten zijn :

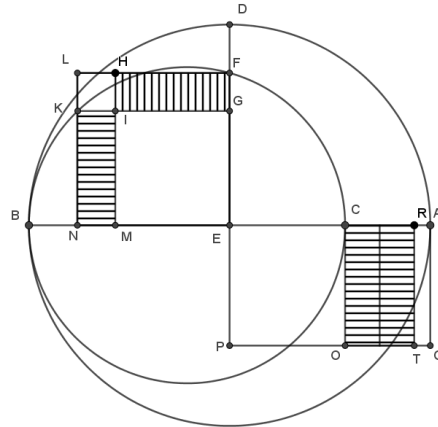
$(14^2 - 9^2)\pi = 115\pi = 361,2831 \dots \notin \mathbb{Q}$. Gegeven was: $361\frac{3}{7} = 361,4285 \dots \in \mathbb{Q}$.

Q55 Oppervlakte bij cirkel 1

Zie figuur 1. Binnen een cirkel met diameter AB ligt een andere cirkel met diameter BC , die elkaar raken in B . Het verschil tussen de twee cirkels heeft de vorm van een maan[-sikkel]. Het middelpunt van de grote cirkel is E . Gegeven is verder: $|AC| = 9$, $|FD| = 5$, ED loodrecht op AB .
Gevraagd is de oppervlakte van de maan[-sikkel].



Figuur 1



Figuur 2

Zie nu figuur 2. $|FG| = |AC| - |FD| = 9 - 5 = 4$.

Bekend is dat $|EF|$ de middelevenredige is tussen $|EC|$ en $|EB|$.

Dus: $opp(EFLN) = |EF|^2 = |EC| * |EB| = |EC| * |AE|$.

Punt P is zodanig dat $|EP| = |EC|$.

Gevolg: $opp(EFLN) = opp(AEPQ)$.

Verder: $|FG| + |NM| = 4 + 4 = |RC|$.

Dus: $|AR| = |AC| - |RC| = 1$.

Uit de figuur volgt: $opp(ARTQ) = opp(vierkant IHLK) = 16$.

Dus: $|AQ| * |AR| = 16$. Gevolg: $|AQ| = 16$. En dus ook: $|EC| = 16$.

Hiermee volgt: $|AE| = 16 + 9 = 25$.

En de halve diameter van de kleine cirkel is dan: $(25 - 4\frac{1}{2}) = 20\frac{1}{2}$.

En nu met de leerstellingen van Archimedes is het verschil van de grote en de kleine cirkel te bepalen, hetgeen de gevraagde oppervlakte van de maan[-sikkel] geeft. [1]

Opmerking:

[1] Cardinael gebruikt $\pi = \frac{22}{7}$. Dat geeft:

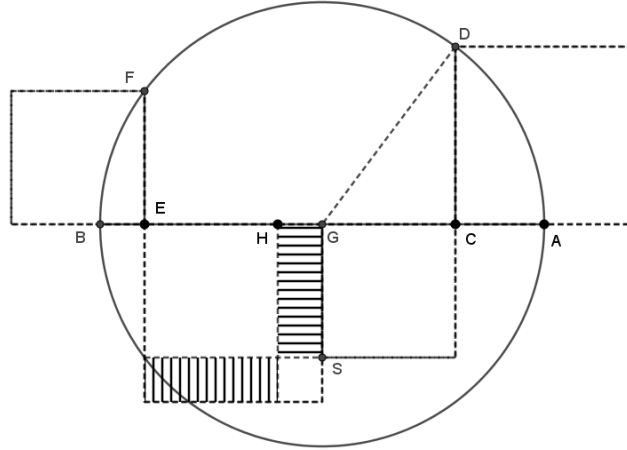
$$Opp(sikkel) = \frac{22}{7} \left(25^2 - \left(20\frac{1}{2} \right)^2 \right) = 643\frac{1}{2}.$$

Algebraïsch: noem de stralen R en r .

Dan geldt: $(R - 5)^2 + \left(4\frac{1}{2} \right)^2 = r^2 = \left(R - 4\frac{1}{2} \right)^2$. Dan volgt meteen: $R = 25$. Etc.

Q56 Straal van cirkel 2

Zie figuur 1. Op de diameter AB van een cirkel liggen twee punt C en E . Er is gegeven: $|CE| = 42$, $|CD| = 24$, $|EF| = 18$, EF en CD loodrecht op AB . Gevraagd: $|AB|$.



Figuur 1

Eerst: $|CD|^2 - |EF|^2 = 576 - 324 = 252$.

Dan: $|EC|^2 - 252 = 1764 - 252 = 1512$.

dan volgt: $\frac{1512}{2|EC|} = 18 = |CG|$. [1]

En dan: $|GD|^2 = |CG|^2 + |CD|^2 = 324 + 576 = 900$.

Dus: $|GD| = 30$, $|AB| = 60$.

Anders:

Eerst: $|CD|^2 - |EF|^2 = 576 - 324 = 252$. [2]

Dan: $|GH| = \frac{252}{|CE|} = 6$. [3]

En: $|CG| = \frac{1}{2}(|CE| - |GH|) = 18$. [4]

De 'grondt van dusdanighe operatie' is eenvoudig te begrijpen met de figuur. [5]

Opmerkingen:

[1] Idee in korte notatie: $|CD| = a$, $|EF| = b$, $|CE| = c$, $|CG| = d$, cirkelstraal = r .
 $r^2 = a^2 + d^2 = b^2 + (c - d)^2$.

Dus: $a^2 - b^2 = c^2 - 2c * d$. Dus $d = \frac{c^2 - (a^2 - b^2)}{2c}$.

[2] In HGQ staat foutief $|CF|$ i.p.v $|EF|$.

[3] In HGQ staat foutief dat gedeeld moet worden door $|BC|$.

[4] In HGQ staat foutief dat $|GH|$ moet worden afgetrokken van $|BC|$ i. p. v. $|CE|$.

[5] Want af te lezen is met als cirkelstraal r :

$|CD|^2 - |EF|^2 = (r^2 - |GC|^2) - (r^2 - |EG|^2) = |EG|^2 - |GC|^2 = |EG|^2 - |EH|^2$.

Dat laatste verschil is gelijk aan $2 * |GS| * |GH| + |GH|^2 = (2 * |GS| + |GH|) * |GH|$.

Maar er geldt: $(2 * |GS| + |GH|) = (|EH| + |GC| + |GH|) = |CE|$.

Dus inderdaad: $|GH| = \frac{|CD|^2 - |EF|^2}{|CE|}$.

Opmerkingen:

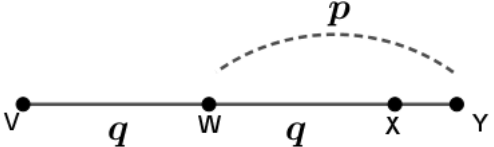
[1] Niet handig om veelhoeken en hoekpunten dezelfde letter te geven, maar het is niet echt storend.

[2] Want: $|GK|^2 = |CG|^2 + |CK|^2 + opp(A + B + C + E)$.

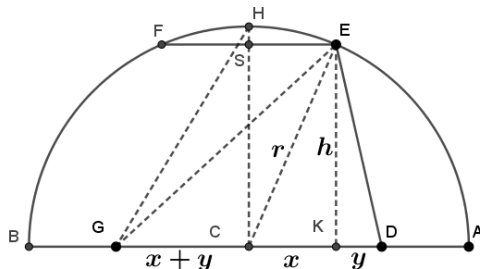
En: $opp(A + B + C + E) = 2 * |CK|^2 + opp(B) + opp(E)$.

[3] Want: $opp(B) = opp(D)$.

[4] Propositie 10, boek II, stelt het volgende:

	$ VY ^2 + XY ^2 = 2(WY ^2 + VW ^2)$ <p>Ofwel:</p> $(p + q)^2 + (p - q)^2 = 2(p^2 + q^2)$
---	---

Algebraïsch:



Figuur 2

$$|EF| = 2x, |CS| = h, |DK| = y, r = \sqrt{106}.$$

Dan volgt, zie figuur 2:

$$y^2 = 10^2 - h^2 = 10^2 - (r^2 - x^2) = x^2 - 6.$$

En:

$$h^2 + (2x + y)^2 = (106 - x^2) + (2x + y)^2 = 12^2.$$

$$\text{Dus: } (106 - x^2) + (2x + \sqrt{x^2 - 6})^2 = 144.$$

Dat geeft, met hulp van *Wolfram Alpha*(!):

$$x = \frac{11}{4}. \text{ Gevolg: } |EF| = 5\frac{1}{2}.$$

En voor (*):

$$|DE|^2 + |EG|^2 = h^2 + y^2 + h^2 + (2x + y)^2 = 2(h^2 + y^2 + 2x^2 + 2xy).$$

$$|DH|^2 + |GH|^2 = 2(r^2 + (x + y)^2) = 2(r^2 - x^2 + 2x^2 + 2xy + y^2) = 2(h^2 + 2x^2 + 2xy + y^2).$$

Dus de twee sommen zijn gelijk.

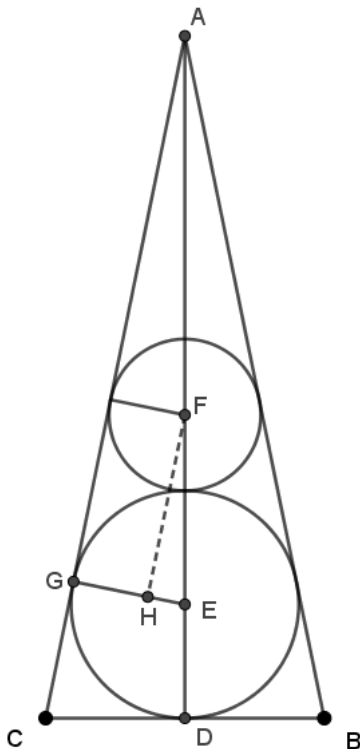
Eerste regel bevat: $2h^2$ plus $(2x + y)^2 + y^2$.

Tweede regel: $2h^2$ plus $2((x + y)^2 + x^2)$.

Dat deze uitdrukkingen gelijk zijn, volgt algebraïsch maar ook uit propositie 10 met $q = x, p = x + y$.

Q58 Cirkel in driehoek 1

Zie figuur 1. In de gelijkbenige $\triangle ABC$ raken twee cirkels aan de zijden en aan elkaar zoals getekend. De diameters van de cirkels zijn 8 en 12. Gevraagd: $|AB| (= |AC|)$, $|BC|$.



Figuur 1

Het verschil van de halve diameters: $|EH| = 2$. [1]
En de som van de halve diameters: $|EF| = 10$.

En uit gelijkvormigheid volgt nu:

$$|EH| : |EF| = |EG| : |AE|.$$

$$\text{Dus: } |AE| = 30.$$

$$\text{En daarmee volgt: } |AD| = |AE| + |DE| = 36.$$

$$\text{Met Pythagoras: } |AG|^2 = |AE|^2 - |EG|^2 = 864.$$

$$\text{Dus: } |AG| = \sqrt{864}.$$

Weer met gelijkvormigheid van driehoeken volgt nu:

$$|AG| : |AE| = |AD| : |AC|.$$

$$\text{Dus: } |AC| = \frac{1080}{\sqrt{864}} = \sqrt{1350} = |AB|. [2]$$

En verder met Pythagoras:

$$|CD|^2 = 1350 - 36^2 = 54.$$

$$\text{Dus: } |BC| = 2 * \sqrt{54} = \sqrt{216}.$$

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat foutief: $|EH| = 3$. In de verdere berekening wordt correct '2' gebruikt.

[2] Meer in het algemeen zal het zo zijn:

Neem voor de diameters $2k * a$, $2m * a$, met $k > m$.

Dan volgt:

$$|AC| = a * \frac{k}{m} * \frac{k+m}{k-m} * \sqrt{km}, \quad |BC| = 2a * \frac{k}{m} * \sqrt{km}.$$

In het voorbeeld: $(a, k, m) = (2, 3, 2)$. Daarmee: $|AC| = 2 * \frac{3}{2} * 5 * \sqrt{6} = 15\sqrt{6} = \sqrt{1350}$.

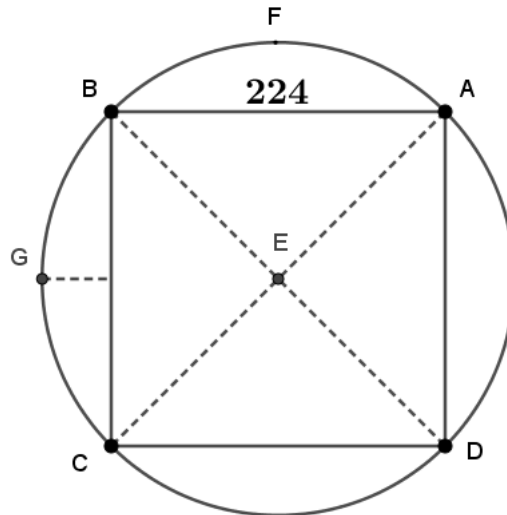
Zonder wortel en zelfs geheeltallig...

Neem: $(a, k, m) = (3, 4, 1)$. Daarmee: $|AC| = 40$, $|BC| = 48$.

Alle zijden zijn nu geheeltallig, ook fraai.

Q60 Vierkant in cirkel 1

Zie figuur 1. Binnen een cirkel past een vierkant $ABCD$, met de hoekpunten op die cirkel. Gegeven is verder: $opp(\text{segment } ABF) = 224$. Gevraagd: $|AC|$, de cirkeldiameter.



Figuur 1

Stel, de diameter $|AC| = 1$.

Dan zal, met de leerstellingen van Archimedes, volgen: $opp(\text{cirkel}) = \frac{11}{14}$. [1]

Dan volgt: $opp(\text{sector } AEBF) = \frac{1}{4} * opp(\text{cirkel}) = \frac{11}{56}$. [2]

En: $opp(\triangle ABE) = \frac{1}{8}$.

Gevolg: $opp(\text{segment } ABF) = \frac{1}{14}$.

En nu met verhoudingen:

$$\frac{1}{14} : 1 = 224 : |AC|^2.$$

$$\text{Dus: } |AC|^2 = 3136.$$

$$\text{En: } |AC| = 56.$$

Naar de leerstelling van Archimedes dat de verhouding diameter staat tot de cirkel[omtrek] geacht wordt te zijn $7 : 22$. [3]

Opmerkingen:

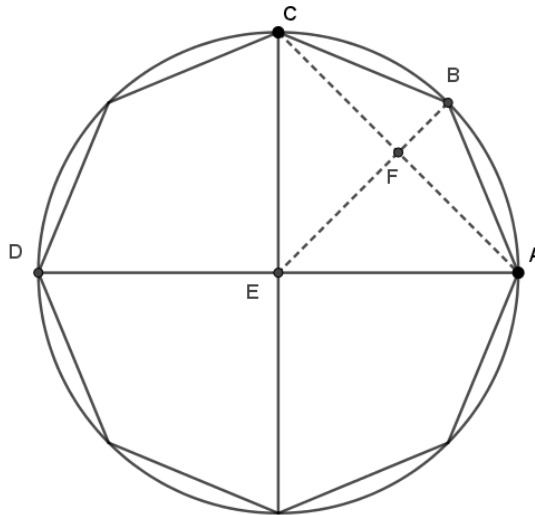
[1] Hier neemt Cardinael dus $\pi = \frac{22}{7}$. Gevolg: $opp(\text{cirkel}) = \frac{22}{7} * \left(\frac{\text{diam}}{2}\right)^2$.

[2] De term *sector* gebruikt Cardinael niet en een *segment* heet een 'boogstuk'.

[3] Met π zou volgen: $|AC| = 56.0310 \dots \notin \mathbb{Q}$.

Q61 Achthoek in cirkel

Zie figuur 1. De zijden van de achthoek in deze cirkel hebben lengte $\sqrt{72 - \sqrt{2592}}$. [1] [2]
Gevraagd: de diameter van de cirkel, $|AD|$.



Figuur 1

Stel, de straal $|AE| = |CE| = 1$. Dan volgt: $|AC| = \sqrt{2}$.

Dus: $|AF| = |CE| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. En ook: $|EF| = \sqrt{\frac{1}{2}}$. [3]

Dus: $|BF| = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Met Pythagoras volgt: $|AB|^2 = |BF|^2 + |AF|^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}$.

Dat geeft: $|AB| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

En nu met verhoudingen:

$\sqrt{2 - \sqrt{2}} : 1 = \sqrt{72 - \sqrt{2592}} : |AE|$. Dus: $|AE| = 6$, $|AD| = 12$.

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat: $\sqrt{.72 - \sqrt{2592}}$. De stip bij 72 is geen decimale punt maar een aanduiding dat de wortel over het geheel erna volgende genomen dient te worden. Blijkbaar is zoiets typografisch nodig: het wortelteken is een losse zetting, net als een letter of een cijfer.

[2] Nu is duidelijk van achter naar voren gewerkt, want zo'n getal verzin je niet.

Zeer waarschijnlijk is de cos-regel gebruikt bij straal = 6.

Er volgt dan: $z^2 = 6^2 + 6^2 - 2 * 6 * 6 * \cos(45^\circ) = 72 - 36\sqrt{2} = 72 - \sqrt{2592}$.

[3] Nergens wordt dit genoteerd als $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

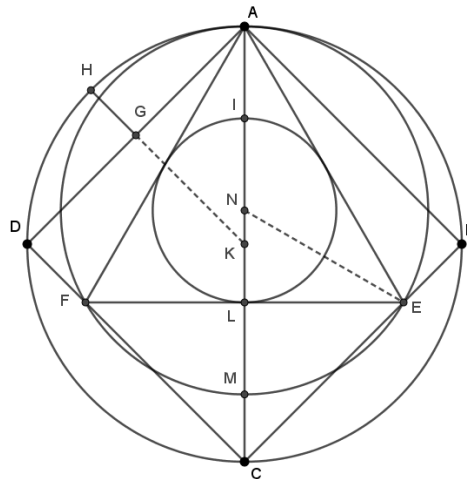
Q62 Vierkant in cirkel 2

Zie figuur 1. Binnen een cirkel past een vierkant $ABCD$, met de hoekpunten op die cirkel. [1]

Punt G is het midden van AD en HG staat loodrecht op AD . Er geldt: $|GH| = \sqrt{32} - 4$.

In dat vierkant ligt een gelijkzijdige $\triangle AEF$, met E en F op de zijden. [2]

Gevraagd: de diameters van de ingeschreven en de omgeschreven cirkel van $\triangle AEF$.



Figuur 1.

Stel, $\triangle AEF$ heeft zijden van lengte 2. Dan volgt: $|AL| = \sqrt{3}$.

En omdat geldt: $|LF| = |LC| = 1$, volgt: $|AC| = 1 + \sqrt{3}$.

Hieruit volgt: $opp(ABCD) = \frac{diam^2}{2} = 2 + \sqrt{3}$.

Dus: $|AB| = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. (*) [3]

Stel nu: $|AG| = 1$.

Dan volgt: $|GK| = 1, |AD| = 2, |AK| = |KH| = \sqrt{2}$.

En dan: $|GH| = \sqrt{2} - 1$.

En met verhoudingen:

$(\sqrt{2} - 1) : (\sqrt{32} - 4) = 2 : |AD|$. Dus: $|AD| = 8$.

En dan met (*):

$(\sqrt{2 + \sqrt{3}}) : 8 = 2 : |AF|$. [4]

Dus: $|AF| = \sqrt{512 - \sqrt{196608}}$. [5]

Dus: $|LF| = \frac{1}{2}|AF| = \sqrt{128 - \sqrt{12288}}$.

En nu: $|AL|^2 = |AF|^2 - |LF|^2 = 384 - \sqrt{110592}$.

Dus: $|NL| = \frac{1}{3}|AL| = \sqrt{42\frac{2}{3} - \sqrt{1365\frac{1}{3}}}$. [6]

Dit is de straal van de ingeschreven cirkel.

$$\text{En: } |AN| = \frac{2}{3}|AL| = \sqrt{170\frac{2}{3} - \sqrt{21845\frac{1}{3}}}.$$

Dit is de straal van de omgeschreven cirkel.

Ofwel:

$$\text{Stel } |NL| = 1. \text{ Dan volgt: } |NE| = 2, |EL| = \sqrt{3}, |EF| = \sqrt{12}.$$

En nu met verhoudingen:

$$\sqrt{12} : \sqrt{512 - \sqrt{196608}} = 2 : |EN|.$$

$$\text{Dus: } |EN| = |AN| = \sqrt{170\frac{2}{3} - \sqrt{21845\frac{1}{3}}}.$$

$$\sqrt{12} : \sqrt{512 - \sqrt{196608}} = 1 : |NL|.$$

$$\text{Dus: } |NL| = \sqrt{42\frac{2}{3} - \sqrt{1365\frac{1}{3}}}.$$

Als boven...

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat dat het vierkant is 'soo groot alst kan'. De hoekpunten liggen dus op de cirkel.

[2] In HGQ staat dat de driehoek 'soo groot als het moghelijk is'. Dus de punten zijn als getekend.

[3] In HGQ staat hier $\sqrt{2} - \sqrt{3}$. De punt betekent dat de wortel genomen wordt van het geheel erna volgende.

[4] In HGQ ontbreekt het wortelteken. Er staat gewoon $2 - \sqrt{3}$.

$$\text{[5] Handmatig! } |AF| = \frac{16}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{16\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}} * \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \sqrt{256(2+\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})} = \dots$$

[6] Bekend is dat de middelpunten van de in- en de omgeschreven cirkel en het zwaartepunt van een gelijkzijdige driehoek samenvallen.

Dat zwaartepunt deelt de zwaarte-/hoogtelijn in verhouding 2 : 1.

De startkeuze is $|GH|$.

Dit volgt uit de keuze: $|AD| = 2m$.

Want dan volgt: $|AK| = m\sqrt{2}$.

En: $|GH| = |HK| - |GK| = m(\sqrt{2} - 1)$. Met nu $m = 4$.

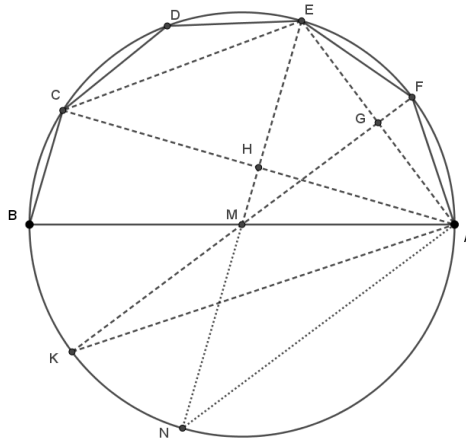
Niet veel anders zou zijn geweest de startkeuze: $|AC| = 2n$.

Dan zou zijn gegeven: $|GH| = n\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$. En met $n = 4$, $|GH| = 4 - \sqrt{8}$.

Er volgt eenzelfde 'constichlijk' gestoei met wortels...

Q63 Veelhoek in cirkel 1

Zie figuur 1. De diameter en een zijde zijn gegeven: $|AB| = 50$, $|AF| = \sqrt{250}$. Lijnstuk AF gaat viermaal om en dan 'een weynigh' meer, namelijk BC . Gevraagd: $|BC|$.



Figuur 1

Eerst: $|AF| * |EF| = 250$. Dan: $|FG| = \frac{250}{|AB|} = 5$.

Want: $|FK| : |AF| = |AF| : |FG|$.

Dan: $|AG|^2 = |AF|^2 - |FG|^2 = 225$. Dus: $|AG| = |EG| = 15$.

En daarmee: $|AE| = |CE| = 30$.

Op dezelfde wijze is te vinden: $|EH|$ en $|AH|$. En daarmee: $|AC| = 48$. [1]

Dan volgt: $|BC|^2 = |AB|^2 - |AC|^2 = 2500 - 2304 = 196$. [2]

Dus: $|BC| = 14$.

Opmerkingen:

[1] In de figuur is punt N toegevoegd.

Er geldt nu: $|HE| : |AE| = |AE| : |NE|$. Dus: $|HE| = 18$.

En: $|AH|^2 = |AE|^2 - |HE|^2 = 576$. Dus: $|AH| = 24$.

[2] Vaak wordt de stelling van Thales gebruikt, hier: $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

Met enige trigonometrie:

Met de cos-regel in $\triangle AMF$ volgt: $\cos(\sphericalangle AMF) = \frac{4}{5}$. (*)

En: $|BC|^2 = 1250 - 1250 \cos(180^\circ - 4\sphericalangle AMF) = 1250 - 1250 * \frac{527}{625} = 196$.

Er geldt namelijk: $\cos(180^\circ - 4\sphericalangle AMF) = -\cos(4\sphericalangle AMF)$.

En: $\cos(4\alpha) = 8 \cos^4(\alpha) - 8 \cos^2(\alpha) + 1 = -\frac{527}{625}$. (*) gewoon invullen.

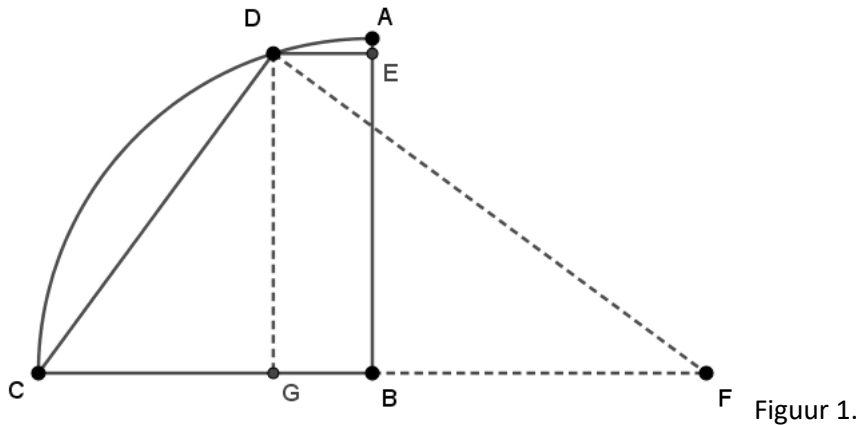
De aanpak van Cardinael is mooier.

Q64 Veelhoek in cirkel 2

Zie figuur 1. In een kwartcirkel $ABCD$ is een vierhoek $EBCD$ getekend.

Gegeven is: DE is evenwijdig aan BC , $|DE| + |BC| = |CD| = 10 - \sqrt{20}$.

Gevraagd: $|AB|$.



Figuur 1.

Punt F ligt op verlengde van BC en er geldt: $|BF| = |BC|$.

Dus volgt: $|FG| = |CD|$. (*)

Driehoek CDF is rechthoekig in D , want $|BC| = |BF| = |BD|$. [1]

Er volgt:

$|CG| : |DG| = |DG| : |FG| = |DG| : |CD|$. Zie (*)

En:

$|CG| : |CD| = |CD| : |CF| = |CG| : |FG|$. Zie (*)

Lijnstuk CF is verdeeld in twee stukken namelijk CG en GF waarvan de lengtes zich verhouden als $|GF| : |CF|$. Dit is de situatie van Q25 (middelevenredige).

Met $|FG| = 10 - \sqrt{20}$ volgt dan: $|CG| = \sqrt{180} - 10$. [2]

En: $|CF| = \sqrt{80}$.

Tenslotte: $|AB| = |BC| = \frac{1}{2}|CF| = \sqrt{20}$.

Opmerkingen:

[1] Volgens de stelling van Thales.

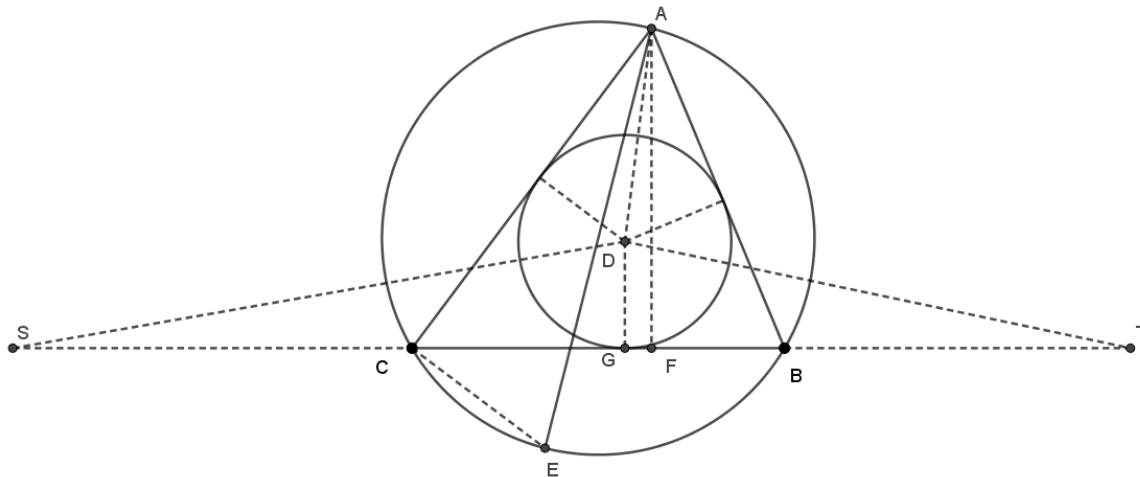
[2] Nu algebraïsch uitgeschreven:

Als $a : b = b : (a + b)$, dan volgt: $a = \frac{1}{2}b(-1 + \sqrt{5})$.

En dan: $|CG| = \frac{1}{2}(10 - \sqrt{20})(-1 + \sqrt{5}) = -10 + 6\sqrt{5} = \sqrt{180} - 10$.

Q65 Driehoek in cirkel 2

Zie figuur 1. In een cirkel is een driehoek ABC beschreven waarvoor geldt:
 $|AB| = 13$, $|BC| = 14$, $|AC| = 15$. Getekend is ook de ingeschreven cirkel [mp D].
 Gevraagd: de diameters van de in- en omgeschreven cirkel van ΔABC .



Figuur 1

Om de diameter $|AE|$ te vinden hebben we de lengte van hoogtelijn AF nodig.

Met Q1 volgt dan: $|AF| = 12$. [1]

De hoek AEC en hoek ABC staan op dezelfde zijde AC en zijn dus gelijk, volgens propositie 21, boek III, Euclides. [2]

Verder geldt: $\angle ACE$ is recht [Thales] en dus gelijk aan $\angle AFB$. Dus ook: $\sphericalangle BAF = \sphericalangle EAC$.

Hieruit volgt: ΔACE is gelijkvormig met ΔAFB .

Dus: $|AF| : |AB| = |AC| : |AE|$.

Gevolg: $12 : 13 = 15 : |AE|$. Dus: $|AE| = 16\frac{1}{4}$.

De oppervlakte van ΔABC is dus 84. Verdubbel dit, geeft 168.

Sommeer alle zijden ($= 42 = |ST|$) en er volgt: $|DG| = \frac{168}{42} = 4$. [3]

Dus de diameter van de ingeschreven cirkel is 8.

Opmerkingen:

[1] Nu snel met Heron: $opp(\Delta ABC) = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$.

Dus: $\frac{1}{2}|AF| * 14 = 84$. $|AF| = 12$.

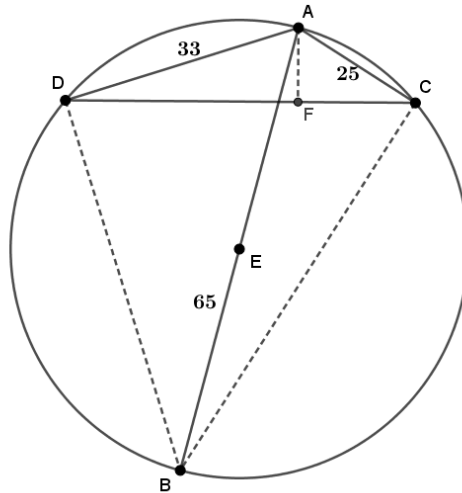
[2] Bekend als de stelling van gelijke omtrekshoeken op eenzelfde koorde.

[3] In de figuur is te zien: $opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2}|DG| * (|AB| + |BC| + |AC|)$.

De tekening in HGQ is duidelijk een grove schets, want aldaar $|SC| < |AC|$, $|BT| < |AB|$.

Q66 Driehoek in cirkel 3

Zie figuur 1. Binnen de cirkel met diameter $|AB| = 65$ ligt een ΔACD waarvan gegeven is: $|AC| = 25$, $|AD| = 33$. Gevraagd: $|CD|$.



Figuur 1

Er geldt: $|AB| : |AD| = |AC| : |AF|$. [1]

Ofwel: $65 : 33 = 25 : |AF|$. Dus: $|AF| = 12 \frac{9}{13}$.

En: $|CF|^2 = |AC|^2 - |AF|^2 = 463 \frac{153}{169}$. Dus: $|CF| = 21 \frac{7}{13}$.

En analoog: $|DF|^2 = |AD|^2 - |AF|^2 = 927 \frac{153}{169}$. Dus: $|DF| = 30 \frac{6}{13}$.

Dus: $|CD| = 52$.

De reden waarmee de berekening van $|AF|$ te doen is, is geleerd in voorgaande Q65.[2]

Anders:

Er geldt: ΔABD is gelijkvormig met ΔACF . En ook is ΔACB gelijkvormig met ΔAFD .

Bereken nu eerst $|BD|$ en $|BC|$. Dan kan want de hoeken ACB en ADB zijn recht.

Er volgt: $|BC| = 60$, $|BD| = 56$.

En dan met verhoudingen:

$|AB| : |BC| = |AD| : |DF|$. Dan volgt: $|DF| = 30 \frac{6}{13}$.

$|AB| : |BD| = |AC| : |CF|$. Dan volgt: $|CF| = 21 \frac{7}{13}$.

Dus: $|CD| = 52$, als boven.

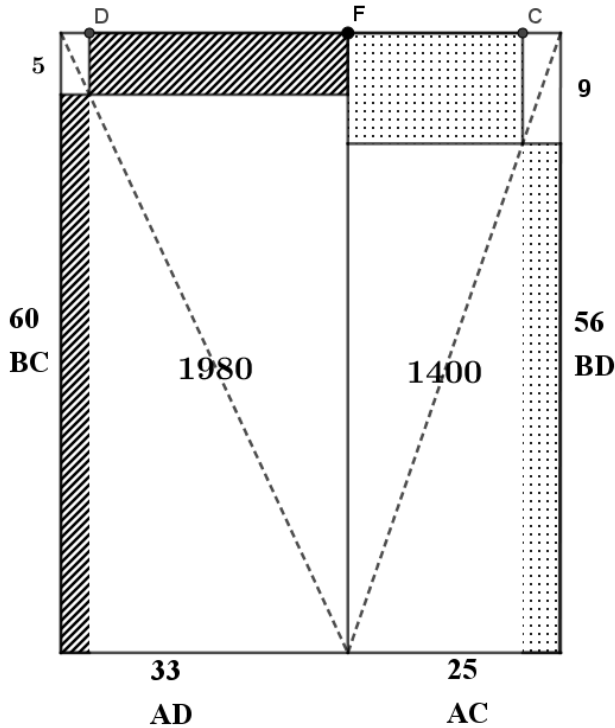
Anders:

Als $|BC|$ en $|BD|$ gevonden zijn (60 en 56), dan volgt:

$|AC| * |BD| + |AD| * |BC| = 3360 = |AB| * |CD|$. Dus: $|CD| = \frac{3360}{65} = 52$. [3]

De oorzaak van deze berekening is eenvoudig af te lezen uit de tweede manier van deze 66^e vraag.

Zie figuur 2 hierna.



Figuur 2

Rechthoek met $|AD|$ en $|BC|$ heeft een oppervlakte 1980. Dit is dezelfde oppervlakte als de rechthoek met zijde $|AB|$ ($= 60 + 5$) en $|DF|$.

Rechthoek met $|AC|$ en $|BD|$ geeft een oppervlakte 1400. Dit is dezelfde oppervlakte als de rechthoek met zijde $|AB|$ ($= 56 + 9$) en $|CF|$.

Dus er geldt:

$$1980 + 1400 = 65 * |DF| + 65 * |CF|.$$

Dus: $|CD| = 52$.

Opmerkingen:

[1] Want $\triangle ABD$ is gelijkvormig met $\triangle ACE$ (Twee hoeken gelijk).

[2] Hiermee is bedoeld(?) de stelling van omtrekshoeken op eenzelfde koorde, nodig voor [1].

[3] De stelling van Ptolemaeus (ca. 85-165) wordt hier feitelijk gebruikt. Die staat niet in de Elementen maar was in de 17^e eeuw wel bekend. Zie Q68 voor het bewijs.

Cardinael gaat in het navolgende de stelling bewijzen met deze specifieke figuur en getallen.

In HGQ zijn de getallen mooi gekozen. Met diameter $|AB| = 65$ zijn er meer keuzes om enkel gehele getallen te krijgen. Uiteraard met $ACBD$ een rechthoek met gehele zijden, maar er is meer mogelijk.

Bijvoorbeeld: $(|AB|, |AC|, |AD| \rightarrow |CD|) =$

$(65, 25, 33 \rightarrow 52), (65, 25, 39 \rightarrow 56), (65, 25, 16 \rightarrow 39), (65, 52, 16 \rightarrow 60), (65, 60, 39 \rightarrow 63)$.

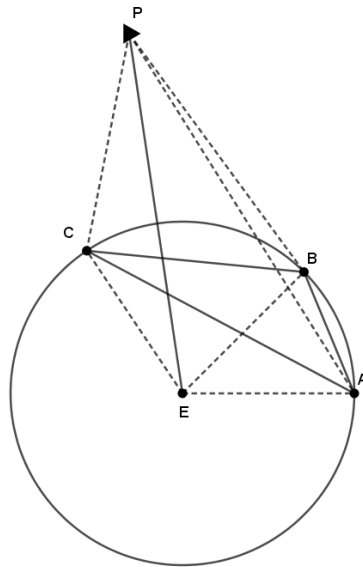
Het eerste voorbeeld is de keuze van Cardinael.

Q67 Schutters in opstelling 1

Zie figuur 1. Drie schutters A, B, C zijn zo opgesteld dat zij een papegaai P kunnen schieten. Zij zijn elk even ver van de papegaai af. [1] Hun onderlinge positie is: $|AB| = 50, |AC| = 104, |BC| = 66$.

Ook is gegeven dat de papegaai op hoogte = 156 boven de aarde is.

Gevraagd is hoever de schutters moeten schieten om de papegaai te raken ofwel: $|AP|$.



Figuur 1

De punten A, B, C liggen op de omgeschreven cirkel van ΔABC . [2]

Met de gegevens kan met Q65 nu de straal van die cirkel gevonden worden.

Er volgt: $|AE| = 65$. [3]

Omdat P loodrecht boven E ligt, volgt met Pythagoras:

$$|AP|^2 = |EP|^2 + |AE|^2 = 156^2 + 65^2 = 28561.$$

Dus: $|AP| = |BP| = |CP| = 169$.

Opmerkingen:

[1] De figuur moet dus eigenlijk 3D zijn: P is de top van een gelijkbenige driezijdige piramide $P.ABC$. De cirkel zou dan als ellips getekend moeten worden en dat is mogelijk lastig voor het betoog. De papegaai hangt stil: het is een oefenopstelling voor de schutterij...

[2] In HGQ wordt het liggen op een cirkel afgeleid uit het gegeven dat de drie punten even ver van P liggen. De tekst is niet geheel duidelijk maar er geldt wel, dat de loodlijn uit P het grondvlak treft in punt E , het middelpunt van die cirkel, anders zijn de ribben niet gelijk.

[3] Even kort met Heron en hoogtelijn h uit B : $opp(\Delta ABC) = 1320 = \frac{1}{2}h * 104$.

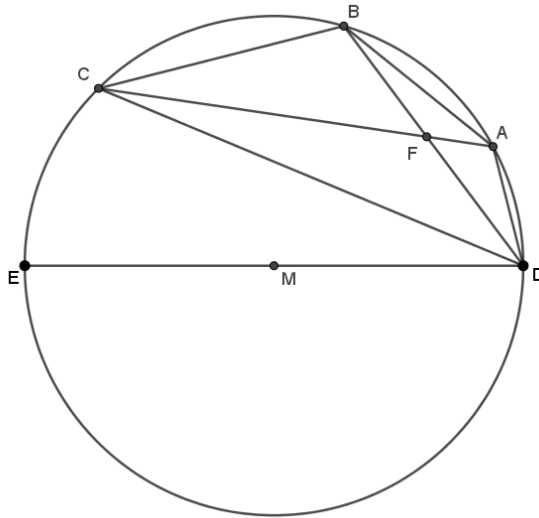
Dus: $h = \frac{330}{13}$. En dan volgt $h : |AB| = |BC| : diameter$. Dat geeft: $diameter = 130$.

Q68 Vierhoek in cirkel

Zie figuur 1. In een cirkel ligt een vierhoek $ABCD$ met ongelijke zijden. [een koordenvierhoek.]

Gegeven is: $|AB| = 25, |BC| = 33, |CD| = 60, |AD| = 16$.

Gevraagd: $|DE|$ ofwel de diameter van de cirkel en de diagonalen, $|AC|, |BD|$.



Figuur 1

Hoek DAC is even groot als hoek DBC : beide staan op dezelfde koorde CD .

Dit geldt t.g.v. propositie 21, boek III, Euclides. Daarom geldt ook: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$.

En: $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BFC$. [1]

Dus: $\triangle BFC$ is gelijkvormig met $\triangle AFD$. Evenzo: $\triangle AFB$ gelijkvormig aan $\triangle DFC$. [2]

En dan volgt: $|AF| : |DF| = |AB| : |BC|$ en ook $|AF| : |BF| = |AD| : |BC|$. [3]

Stel nu: $|AF| = 1$.

Dan: $|BF| = \frac{33}{16} * |AF| = 2 \frac{1}{16}$, $|DF| = \frac{60}{25} * |AF| = 2 \frac{2}{5}$, $|BD| = |BF| + |FD| = 4 \frac{37}{80}$. (*)

En: $|CF| = \frac{33}{16} * |DF| = 4 \frac{19}{20}$, $|AC| = |AF| + |CF| = 5 \frac{19}{20}$. (*)

Er geldt [in het algemeen]: $|AC| * |BD| = |AD| * |BC| + |AB| * |CD|$. [4]

Met (*) zou volgen: $|AC| * |BD| = 26 \frac{883}{1600}$.

Terwijl: $|AD| * |BC| + |AB| * |CD| = 16 * 33 + 25 * 60 = 2028$.

Er geldt nu in verhouding $2028 : 26 \frac{883}{1600} = |AF|^2 : 1$. [5]

Dus: $|AF| = \sqrt{76 \frac{5364}{14161}} = 8 \frac{88}{119}$.

En er volgt: $|AC| = 8 \frac{88}{119} * 5 \frac{19}{20} = 52$, $|BD| = 39$. [6]

Nu alle zijden van $\triangle ABC$ bekend zijn, kan met Q65 gevonden worden: $|DE| = 65$. [7]

De diagonalen kunnen ook zeer 'constel'ijck' gevonden worden met Q33 en Q34.

Want $|AB|$ en $|BC|$ en de verhouding $|AF| : |CF| : |BF|$ zijn bekend.

[In HGQ niet verder uitgewerkt]

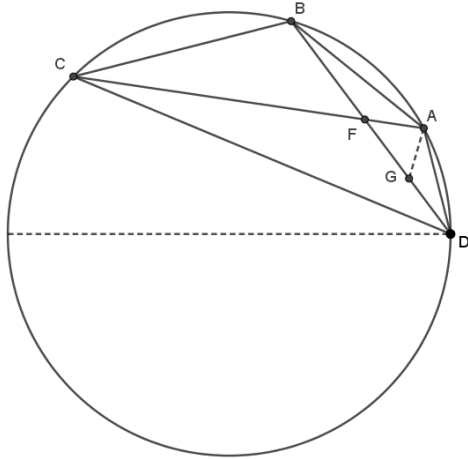
[En in HGQ volgt nu opmerkelijk...]

Aangaande de demonstratie dat voor de koordenvierhoek geldt

$$|AC| * |BD| = |AD| * |BC| + |AB| * |CD|,$$

en dat is gedaan door Ptolemeus en Copernicus.

Hierna volgt om hetzelfde te demonstreren.



Figuur 2

Zie figuur 2.

Daarin geldt: $\sphericalangle DAG = \sphericalangle FAB$.

Volgens propositie 21, boek III, Euclides geldt: $\sphericalangle ADG = \sphericalangle ACB$. [omtrekshoeken]

Gevolg: $\sphericalangle AGD = \sphericalangle ABC$.

Dus: $\triangle AGD$ is gelijkvormig met $\triangle ABC$.

Analoog omdat $\sphericalangle DAC = \sphericalangle GAB$

en $\sphericalangle ABG = \sphericalangle ACD$ volgt:

$\triangle ABG$ is gelijkvormig met $\triangle ADC$.

Er volgt: $|AC| : |BC| = |AD| : |DG|$.

Dus een rechthoek met zijden van lengte $|BC|$ en $|AD|$ is even groot is als een rechthoek X met zijden van lengte $|AC|$ en $|DG|$.

Analoog volgt: $|AC| : |CD| = |AB| : |BG|$.

Dus een rechthoek Y met zijden van lengte $|AC|$ en $|BG|$ is even groot is als een rechthoek met zijden van lengte $|AB|$ en $|CD|$.

Voeg nu X en Y samen. Er ontstaat een rechthoek met zijden $|AC|$ en $|BD|$.

$$\text{Dus: } |AD| * |BC| + |AB| * |CD| = |AC| * |DG| + |AC| * |BG| = |AC| * |BD|.$$

En dit moest bewezen worden.

[In HGQ volgt nog een getallenvoorbeeld, maar dat is hier weggelaten.]

Opmerkingen:

[1] Overstaande hoeken maar voor gelijkvormigheid zijn twee gelijke hoeken al voldoende.

[2] De gelijkvormigheid van het tweede paar driehoeken wordt niet vermeld!

[3] In HGQ staan andere verhoudingen: $|AF| : |BF| = |DF| : |CF|$. Daarmee is nog niet te rekenen want dat is nog een onbekende verhouding, tenzij [2] gedaan is.

[4] De stelling van Ptolemaeus.

[5] Als $|AF| = \lambda * 1$, dan worden alle lengtes met λ vermenigvuldigd, dus in [4] verschijnt λ^2 .

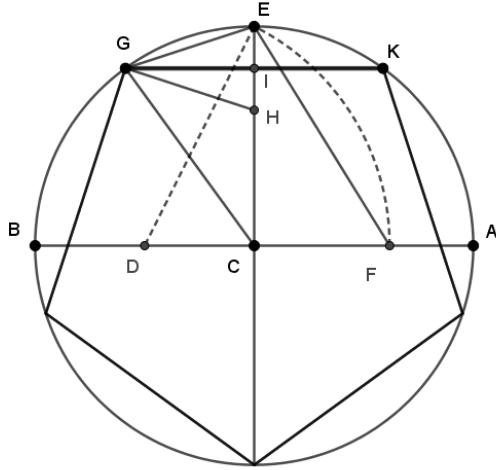
[6] Alles handmatig berekend!

[7] Even kort met Heron en hoogtelijn h uit B : $opp(\triangle ABC) = 330 = \frac{1}{2} h * 52$.

Dus: $h = \frac{330}{26}$. En dan: $h : |AB| = |BC| : diameter$. Dat geeft: $diameter = 65$.

Q69 Vijfhoek in cirkel

Zie figuur 1. In een cirkel met diameter $|AB| = 20$ is een (regelmatige) vijfhoek getekend.
 Gevraagd: de lengte van de zijde daarvan en van de zijde van een (regelmatige) tienhoek in die cirkel.



Figuur 1

Punt D is het midden van BC .
 Dan volgt: $|DE| = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125}$.

Met $|DF| = |DE|$ volgt:
 $|CF| = |DF| - |CD| = \sqrt{125} - 5$.

En dit is ook $|EG|$, de lengte van de zijde van een (regelmatige) tienhoek. (*)

En:
 $|EF| = \sqrt{|CF|^2 + |CE|^2} = \sqrt{250 - \sqrt{12500}}$. [1]

En dit is ook $|GK|$, de lengte van de zijde van een (regelmatige) vijfhoek. (**)

Het bewijs van dit alles volgt nu.

Eerst (*).

De halve diameter wordt verdeeld, als in propositie 30, boek VI Euclides, in twee stukken zodanig dat het kleinste stuk zich verhoudt tot het grootste stuk als het grootste stuk tegen het geheel.

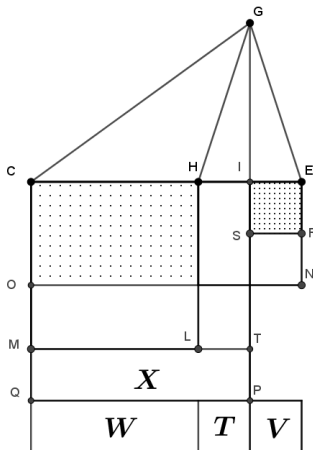
$|EG|$ een zijde is van een tienhoek en $|EG| = |CF|$.

Dit geldt omdat $\triangle ECG$ gelijkbenig [2] is en $\sphericalangle CEG$ en $\sphericalangle CGE$ elk tweemaal zo groot zijn als $\sphericalangle ECG$, zoals in Q35 is aangetoond. [3]

Stel nu dat $\sphericalangle ECG = 1$, dan volgt $\sphericalangle CEG = \sphericalangle CGE = 2$, dus samen 5.

En die som is gelijk aan een halve cirkel, volgens propositie 32, boek I Euclides. [4]

Dus een hele cirkel is 10 van zulke hoeken als $\sphericalangle ECG$. Daarom is boog EG het $\frac{1}{10}$ deel van de hele cirkel en is $|EG|$ een zijde van een (regelmatige) tienhoek.



Figuur 2

Nu dan het bewijs voor (**).

Neem uit figuur 1 driehoek ECG apart, met dus $|EG|$ een zijde van een tienhoek. Zie figuur 2.

Eerst is te bewijzen: $|CG|^2 + |EG|^2 = |GK|^2$.

Met I het midden van GK is dit hetzelfde als te bewijzen: $|CG|^2 + |EG|^2 = 4 * |GI|^2$. (***)

Met: $|EG|^2 - |GI|^2 = |EI|^2 = opp(EISR)$.

En: $|CG|^2 - |GI|^2 = |CI|^2 = opp(ICQP)$.

Om (***) te krijgen is nog te bewijzen:

$opp(EISR) + opp(ICQP) = 2 * |GI|^2$. (****)

Omdat in $\triangle ECG$ de basishoeken tweemaal zo groot zijn als de hoek bij C volgt:

$|EH| : |CH| = |CH| : |CE|$. Zie Q35 (over de middelevenredige).

Gevolg: $opp(HCML) = |CH|^2 = |EH| * |CE| = opp(ECON)$.

Maar ook: $opp(HCML) = |CH|^2 = |EG|^2 = |GI|^2 + |EI|^2$.

Dus: $opp(ECON) = |GI|^2 + |EI|^2 = opp(EISR) + |GI|^2$.

En uit de figuur:

$opp(ECON) = opp(EISR) + opp(\text{veelhoek NRSICO})$.

Gevolg: $opp(\text{veelhoek NRSICO}) = |GI|^2$.

In figuur 2 te zien: $opp(ICQP) - opp(HCML) = opp(\text{gnomon IPQMLH})$.

En: $opp(\text{gnomon IPQMLH}) = opp(X) + opp(IHLT) = opp(X + W)$.

Merk op in figuur 2: $\text{veelhoek NRSICO} = X + W + T + V$.

En: $opp(EISR) = opp(V) = opp(T)$.

Nu alles ingevuld voor (****):

$$\begin{aligned} opp(EISR) + opp(ICQP) &= \\ opp(V) + opp(HCML) + opp(\text{gnomon}) &= \\ opp(V) + |GI|^2 + opp(V) + opp(X + W) &= \\ opp(V) + |GI|^2 + opp(V) + opp(NRSICO) - opp(T + V) &= \\ |GI|^2 + opp(NRSICO) &= 2 * |GI|^2 \end{aligned}$$

Dus is nu bewezen: $|CG|^2 + |EG|^2 = |GK|^2$.

Door invullen volgt nu: $|GK|^2 = 10^2 + (\sqrt{125} - 5)^2 = 250 - \sqrt{12500}$. [5]

En dit is inderdaad ook gelijk aan $|EF|^2$.

Opmerkingen:

[1] Het 'overkoepelende' wortelteken ontbreekt in HGQ.

[2] Cardinael spreekt van een 'ghelijckvoetighen triangel'.

[3] In Q35 wordt juist begonnen met die hoeken en volgt een redenering richting middelevenredige.

[4] Een halve cirkel staat hier voor twee rechte hoeken, zoals Euclides dat noteert.

[5] Die uitwerking staat niet in HGQ.

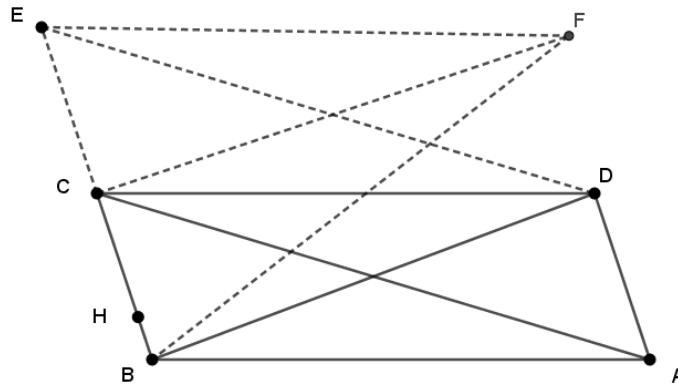
Met enige verhouding zou eenvoudig volgen:

$$|GI| : |EG| = \frac{1}{2} z_5 : z_{10} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{z_{10}}{2}\right)^2} : r.$$

$$\text{Dus: } z_5 = z_{10} \sqrt{4 - \left(\frac{z_{10}}{r}\right)^2}.$$

Q70 Zijde van parallellogram

Zie figuur 1. Van een parallellogram $ABCD$ [1] is gegeven: $|AB| = |CD| = \sqrt{106}$. Voor de diagonalen geldt: $|AC| = 12$, $|BD| = 10$. Gevraagd: $|AD|$ en dus ook $|BC|$.



Figuur 1

Richt loodlijn op in punt C met $|CE| = |BC|$.

Punt F ligt op die loodlijn zodanig dat $|BD|^2 + |DE|^2 = |CF|^2 + |BF|^2$ met $|CF| = |CD|$.

Er volgt nu:

$$\frac{1}{2}(|BD|^2 + |DE|^2) = 122 = |BF|^2. [2]$$

En met $|CF| = \sqrt{106}$ volgt:

$$|BC| = \sqrt{|BF|^2 - |CF|^2} = 4.$$

Dat bovenstaande juist is, is aangetoond in Q57. [2]

Deze kwestie kan ook opgelost worden met Q20 (zwaartelijn in driehoek).

Opmerkingen:

[1] Cardinael spreekt over een 'gheschickt vierhoeck'. Is bedoeld een verschoven vierhoek?

[2] Kort herhaald en genoteerd:

Noem H het voetpunt van de hoogtelijn h uit B , $|CE| = |BC| = x$, $|HB| = y$.

Er volgt:

$$|BD|^2 + |DE|^2 = h^2 + y^2 + h^2 + (2x - y)^2 = 2(h^2 + (x - y)^2) + 2x^2.$$

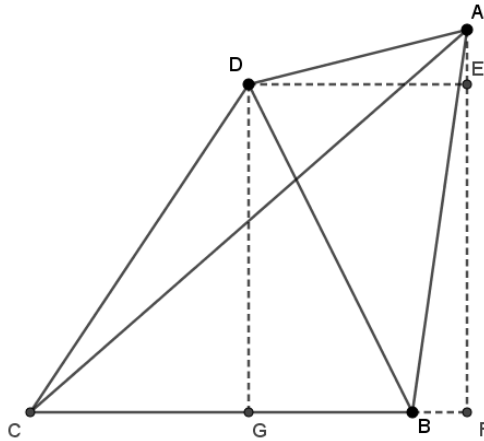
En ook: $|CD|^2 = h^2 + |CH|^2 = h^2 + (x - y)^2$.

Dus: $|BD|^2 + |DE|^2 = 2|CD|^2 + 2x^2$.

En met $|CF| = |CD|$ volgt: $x^2 = \frac{1}{2}(|BD|^2 + |DE|^2) - |CF|^2$.

Q71 Zijde van vierhoek 1

Zie figuur 1. Van vierhoek $ABCD$ [1] is gegeven: $|AB| = \sqrt{192\frac{1}{4}}$, $|BC| = 13$, $|CD| = 15$. Voor de diagonalen geldt: $|BD| = 14$, $|AC| = 19\frac{1}{2}$. Gevraagd: $|AD|$.



Figuur 1

Hoogtelijn DG is te doen en dan BG .

Er volgt: $|DG| = 12\frac{12}{13}$, $|BG| = 5\frac{5}{13}$. [2]

Analoog: $|BF| = \frac{19}{26}$, $|AF| = 13\frac{11}{13}$. [3]

Er volgt: $|DE| = |FG| = |BG| + |BF| = 6\frac{3}{26}$.

En: $|AE| = |AF| - |EF| = |AF| - |DG| = \frac{12}{13}$.

Tenslotte: $|AD| = \sqrt{|AE|^2 + |DE|^2} = \sqrt{38\frac{1}{4}}$.

Opmerkingen:

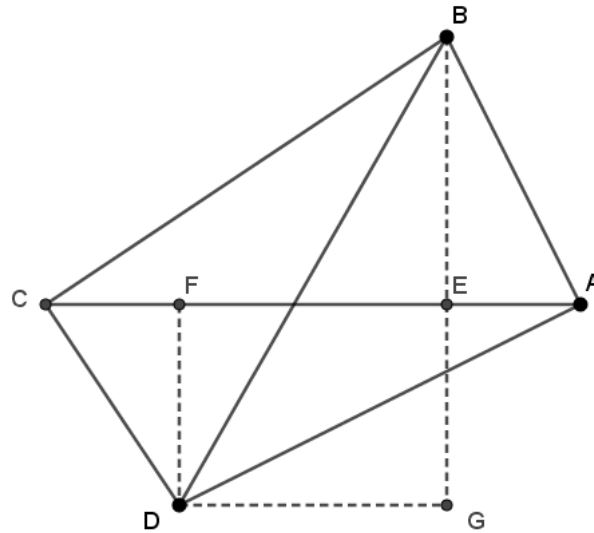
[1] Cardinael spreekt over een 'ongheschickt' vierhoek. Is hier 'willekeurig' bedoeld?

[2] Zie daarvoor bijvoorbeeld Q1 (hoogtelijn binnen driehoek).

[3] Zie daarvoor bijvoorbeeld Q2 (hoogtelijn buiten driehoek).

Q72 Diagonaal van vierhoek

Zie figuur 1. Van de vierhoek $ABCD$ is gegeven: $|AB| = 26$, $|BC| = 40$, $|CD| = 20$, $|AD| = 34$.
En voor een diagonaal geldt: $|AC| = 42$. Gevraagd: $|BD|$.



Figuur 1.

Eerst de hoogtelijnen BE en DE met Q1 (hoogtelijn in driehoek).

Dan volgt: $|BE| = 24$, $|DF| = 16$, $|AE| = 10$, $|CF| = 12$.

Dus:

$$|BG| = |BE| + |EG| = |BE| + |DF| = 40.$$

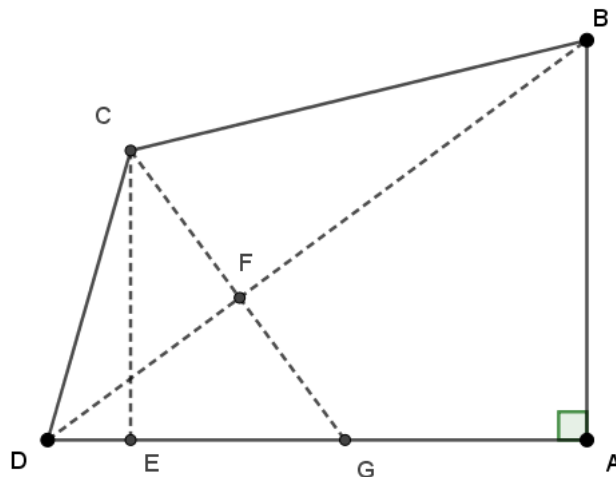
$$\text{En: } |EF| = |AC| - |AE| - |CF| = 20.$$

Dus ook: $|DG| = 20$.

$$\text{En er volgt: } |BD| = \sqrt{|DG|^2 + |BG|^2} = \sqrt{2000}.$$

Q73 Loodlijn in vierhoek 1

Zie figuur 1. In vierhoek $ABCD$ is hoek A recht en CE een loodlijn en verder is gegeven: $|AB| = 33\frac{3}{5}$, $|BC| = 39$, $|CD| = 25$, $|AD| = 44\frac{4}{5}$. Gevraagd: $|CE|$.



Figuur 1

$|BD| = 56$, te doen met Pythagoras in $\triangle ABD$.

CF is een hoogtelijn [1] in $\triangle BCD$ en dan [met Q1] is te vinden: $|CF| = 15$, $|DF| = 20$.

Nu geldt: $|AB| : |AD| = |FG| : |DF|$. [2]

$$\text{Dus: } |FG| = \frac{33\frac{3}{5} \cdot 20}{44\frac{4}{5}} = 15.$$

Er volgt: $|CG| = |CF| + |FG| = 30$.

En: $|BD| : |AD| = |CG| : |CE|$. [3]

Dus: $|CE| = 24$.

Opmerkingen:

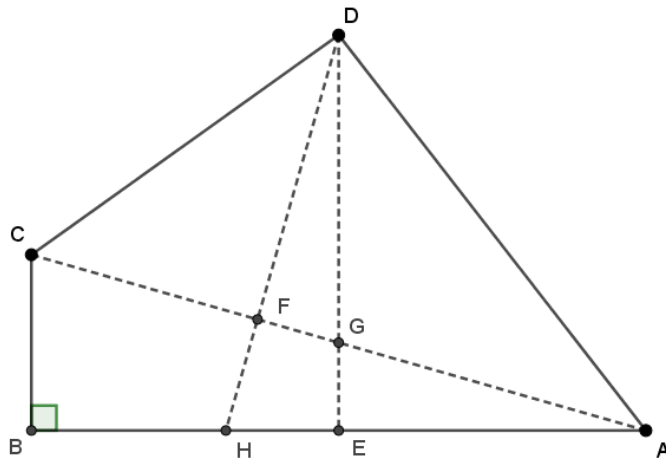
[1] Dat staat niet in HGQ maar volgt uit het verhaal.

[2] Want $\triangle ABD$ is gelijkvormig met $\triangle FGD$ (hh).

[3] Want $\triangle ABD$ is gelijkvormig met $\triangle EGC$ (hh).

Q74 Loodlijn in vierhoek 2

Zie figuur 1. Van vierhoek $ABCD$ is gegeven dat hoek B recht is. Lijn DE is een loodlijn op AB .
En: $|AB| = 48, |BC| = 14, |CD| = 30, |AD| = 40$. Gevraagd: $|DE|$.



Figuur 1

$|AC| = 50$, te doen met Pythagoras. Dan [met Q1]: $|DF| = 24, |AF| = 32$.
Er geldt: $|AB| : |BC| = |DF| : |FG|$, want $\triangle ABC$ is gelijkvormig met $\triangle DFG$.
Gevolg: $|FG| = 7$.
En ook: $|AB| : |AC| = |DF| : |DG|$. Er volgt: $|DG| = 25$.
En: $|AG| = |AF| - |FG| = 25$.
Er geldt: $|AC| : |BC| = |AG| : |EG|$. Er volgt: $|EG| = 7$.
Dus: $|DE| = |DG| + |EG| = 32$.

Anders:

Eerst $|DF| = 24, |AF| = 32$.
Er geldt: $|AB| : |BC| = |AF| : |FH|$.
Dus: $|FH| = 9\frac{1}{3}$.
Er volgt: $|DH| = |DF| + |FH| = 33\frac{1}{3}$.
En met $|AC| : |AB| = |DH| : |DE|$ volgt: $|DE| = 32$.

In HGQ volgt nog:

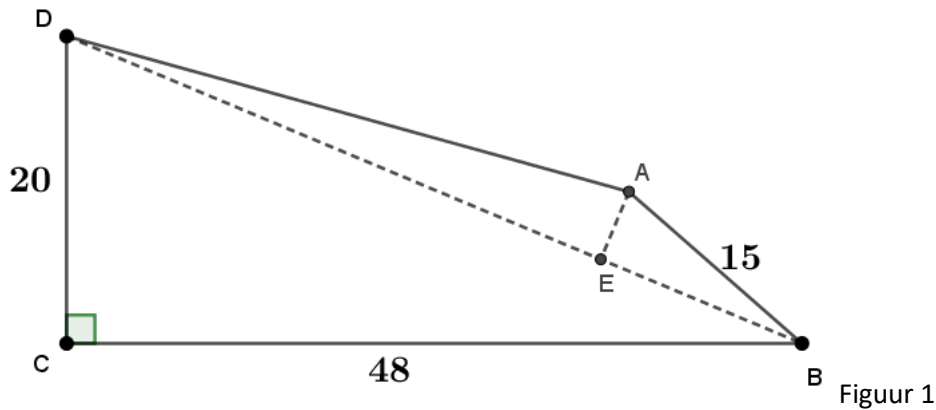
Deze lijn (dit lijnstuk) kan ook nog anders gevonden worden zoals geleerd is in Q73. [1]

Opmerking:

[1] Er staat Q72 in HGQ maar dat vraagstuk gaat over de lengte van diagonalen.

Q75 Zijde van vierhoek 2

Zie figuur 1. Van vierhoek $ABCD$ is gegeven dat hoek C recht is en $opp(ABCD) = 576$.
Verder geldt: $|AB| = 15$, $|BC| = 48$, $|CD| = 20$. Gevraagd: $|AD|$.



Eerst: $opp(\triangle BCD) = 480$.

Dus: $opp(\triangle ABD) = 576 - 480 = 96$.

Met Pythagoras volgt: $|BD| = 52$.

En er volgt: $opp(\triangle ABD) = \frac{1}{2}|BD| * |AE|$.

Dus: $|AE| = \frac{96}{26} = 3\frac{9}{13}$.

En verder met Pythagoras: $|BE| = 14\frac{7}{13}$.

Dus: $|DE| = |BD| - |BE| = 37\frac{6}{13}$.

En dan weer met Pythagoras:

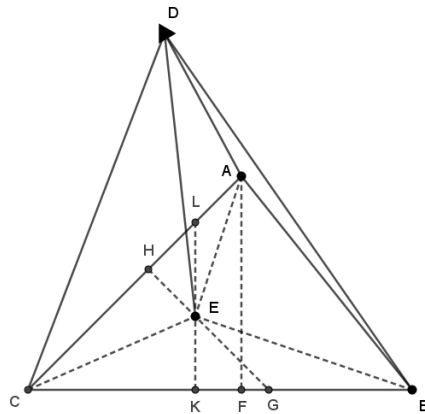
$|AD| = \sqrt{1417}$.

Q76 Schutters in opstelling 2

Zie figuur 1. Op een driehoekig stuk grond ABC is een papegaai opgesteld op een staaf DE , loodrecht op de grond [1]. In elke hoek ligt een schutter om op de papegaai te schieten en er is gevonden dat schutter A 140 voet moet schieten om te papegaai te raken, B 150 voet en C 130 voet [2].

Verder is gegeven: $|AB| = 130$, $|BC| = 140$, $|AC| = 150$.

gevraagd: $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$, $|DE|$ [3].



Figuur 1

De hoogtelijn uit D in $\triangle BCD$ heeft voetpunt K . Te vinden zijn dan: $|CK| = 50$, $|BK| = 90$. [4]

De hoogtelijn uit A in $\triangle ABC$ heeft voetpunt F .

En analoog volgt: $|BF| = 50$, $|CF| = 90$. En verder: $|AF| = 120$.

Ook: $|CK| : |KL| = |CF| : |AF|$, want $\triangle CKL$ is gelijkvormig met $\triangle CFA$. Gevolg: $|KL| = 66\frac{2}{3}$.

De hoogte lijn uit D in $\triangle ACD$ heeft voetpunt H . Dan volgt: $|CH| = 66$.

En: $|CF| : |AF| = |CH| : |GH|$, want $\triangle ACF$ is gelijkvormig met $\triangle GCH$. Gevolg: $|GH| = 88$.

En ook: $|CF| : |AC| = |CH| : |CG|$. Er volgt: $|CG| = 110$. En: $|GK| = |CG| - |CK| = 60$.

Er volgt: $|AC| : |CG| = |GK| : |EK|$ [5] met gevolg: $|EK| = 45$.

Met Pythagoras volgt nu: $|EG| = \sqrt{60^2 + 45^2} = 75$. Dus: $|EH| = |GH| - |EG| = 13$.

En dan telkens met Pythagoras:

$$|CE| = \sqrt{13^2 + 66^2} = \sqrt{4525}, |BE| = \sqrt{10125}, |AE| = 85.$$

Tenslotte: $|DE| = \sqrt{|AD|^2 - |AE|^2} = \sqrt{12375}$ en dit is 'nae by' $111\frac{1}{4}$ voeten. [6]

Opmerkingen:

[1] De figuur moet eigenlijk 3D getekend zijn, een piramide, maar dan ogen de hoeken bij H niet meer recht. Bij punt D staat in HGQ een vogeltje getekend...

[2] Hoe is dat gevonden?

[3] In HGQ staat: 'hoeveele dat de papegaey D dan boven den horizont hooghe is'.

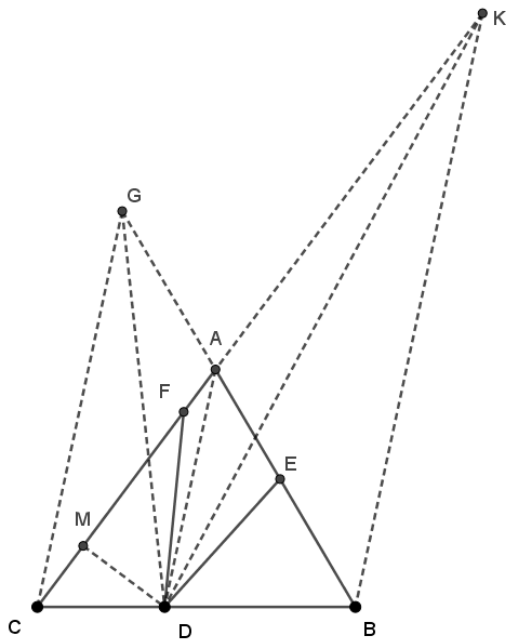
[4] Zie Q1. In deze kwestie zijn de zijden een factor 10 groter dan in Q1.

[5] In HGQ staat foutief $|AF| : |FG| = \dots$

[6] Voor het eerst geeft Cardinael een benadering: $(111\frac{1}{4})^2 = 12376,5625$.

Q77 Driehoek in stukken delen 1

Zie figuur 1. Van een driehoekig stuk grond ABC is gegeven: $|AB| = 13$, $|BC| = 15$, $|AC| = 14$. Dit stuk grond moet verdeeld worden in drie gelijke stukken door rechte lijnen vanuit punt D . Er geldt nog: $|CD| = 6$. Waar komen de 'scheidenlijnen' uit? Ofwel gevraagd: $|BE|$, $|CF|$.



Figuur 1

De lijn door C is evenwijdig aan AD en snijdt het verlengde van BA in punt G .

Dan volgt: $\triangle ACD$ is even groot als $\triangle AGD$.

Zij staan op dezelfde basis AD zijn dus gelijk volgens propositie 37, boek I Euclides.

Gevol: $\triangle ABC$ is even groot als $\triangle BDG$.

Er geldt ook: $|BD| : |AB| = |BC| : |BG|$, want DA is evenwijdig aan DG . Dus: $|BG| = 21\frac{2}{3}$.

Deel nu zijde BG in drie gelijke delen.

Er volgt: $|BE| = 7\frac{2}{9}$.

Dus de afgesneden $\triangle BDE$ is het $\frac{1}{3}$ deel van $\triangle ABC$.

Analoog aan hierboven is $\triangle CDK$ even groot als $\triangle ABC$.

Er volgt: $|CD| : |AC| = |BC| : |CK|$. Dus: $|CK| = \frac{14 \cdot 15}{6} = 35$.

Deel nu zijde CK in drie gelijke delen, en er volgt: $|CF| = 11\frac{2}{3}$.

Dus de afgesneden $\triangle CDF$ is het $\frac{1}{3}$ deel van $\triangle ABC$, en de vierhoek $DEAF$ ook.

Anders:

Vind eerst de oppervlakte van de driehoek. Er volgt: $opp(\triangle ABC) = 84$. Derde deel is 28.

Dan volgt voor de hoogtelijn BL uit B : $|BL| = 12$.

En dan: $|DM| : |CD| = |BL| : |BC|$. Dus: $|DM| = 4\frac{4}{5}$.

Er volgt: $opp(\triangle CDF) = 28 = \frac{1}{2}|DM| * |CF|$. Dus: $|CF| = 11\frac{2}{3}$.

En zo is ook $|BE|$ te vinden.

Opmerking:

Iets sneller: $opp(\triangle CDF) = \frac{1}{2}|CF| * |CD| \sin(\gamma) = \frac{1}{3} opp(\triangle ABC) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2} |BC| * |AC| \sin(\gamma)$.

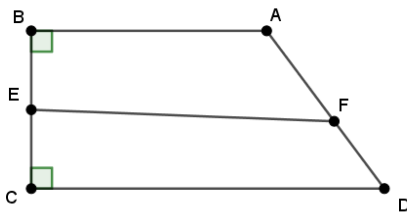
Dus: $|CF| * 3|CD| = |BC| * |AC|$. Etc.

Q78 Trapezium in stukken delen 1

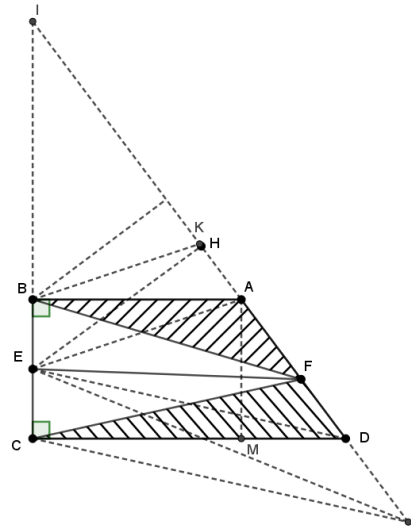
Zie figuur 1. Twee broers dienen een vierhoekig stuk land $ABCD$ te verdelen. Er is gegeven:

AB is evenwijdig aan CD , $|AB| = 24$, $|CD| = 36$, $|BC| = 16$.

De hoeken bij B en C zijn recht. De verdeling moet gebeuren door de lijn EF zodat elk een gelijk deel krijgt. Er geldt verder dat E het midden is van AC . Gevraagd: $|AF|$, $|DF|$.



Figuur 1



Figuur 2

Zie verder figuur 2. Er geldt: loodlijn $|AM| = 16$, $|DM| = 12$.

Dan volgt met verhoudingen: $|DM| : |AM| = |AB| : |BI|$. Dus: $|BI| = 32$. En: $|EI| = 40$.

Lijn EH is een loodlijn. $|AD| = 20$. [met Pythagoras.]

Er volgt: $|AD| : |DM| = |EI| : |EH|$. Dus: $|EH| = 24$.

Met lijn BK evenwijdig aan lijn AE volgt: $opp(\triangle AEK) = opp(\triangle AEB) = 96$. Dus: $|AK| = 8$. [1]

Analoog volgt: $\frac{1}{2}|EH| * |DL| = opp(\triangle DEL) = opp(\triangle DEC) = 144$. Dus: $|DL| = 12$.

Er volgt: $|KL| = 8 + 20 + 12 = 40$. Dus: $|LF| = |FK| = 20$. [2]

En dan: $|DF| = |FL| - |DL| = 8$, $|AF| = |FK| - |AK| = 12$.

Anders:

Er geldt: $(|AB| + |CD|) : |AD| = |AB| : |DF|$. [3]

Dus: $|DF| = 8$. En dan: $|AF| = 12$.

Opmerkingen:

[1] Merk op: $|AH| = \sqrt{|AE|^2 - |EH|^2} = 8$. Dus: $|AK| = |AH|$. Punt K is tevens punt H .

[2] Want: $opp(\triangle HEF) = opp(\triangle ABEF) = opp(\triangle DCEF) = opp(\triangle LCF)$.

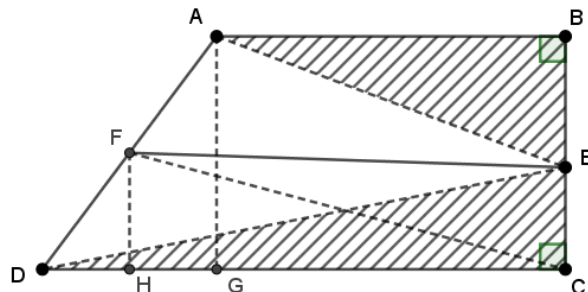
[3] Dit volgt uit de oppervlakten van de gearceerde driehoeken:

$$opp(\triangle ABF) = opp(\triangle CDF) = \frac{1}{2}|AB| * |AF| \sin(\theta) = \frac{1}{2}|CD| * |DF| \sin(\theta).$$

Dus: $|AB| * |AF| = |CD| * |DF|$. Etc.

Q79 Trapezium in stukken delen 2

Zie figuur 1. Een boer heeft een vierhoekig stuk land $ABCD$ waarvoor geldt: AB is evenwijdig aan CD , de hoeken bij B en C zijn recht en $|AB| = 24$, $|BC| = 16$, $|CD| = 36$. Dit stuk land wil hij verdelen in twee gelijke stukken met lijn EF , waarbij F het midden is van AD . Gevraagd: $|BE|$, $|CE|$.



Figuur 1

Eenvoudig volgt: $|FH| = 8$ en $|DH| = 6$.

Er volgt: $opp(\triangle CDF) = 144$.

En dan: $opp(\triangle CEF) = \frac{1}{2} opp(ABCD) - opp(\triangle CDE) = 240 - 144 = 96$.

En met $|EF| = |CH| = 30$ volgt nu: $96 = \frac{1}{2} * 30 * |CE|$. Dus: $|CE| = 6\frac{2}{5}$. En dus: $|BE| = 9\frac{3}{5}$.

Dit vraagstuk kan ook opgelost worden met Q78 door de vierhoek om te zetten naar een driehoek waarvan de basis het verlengde is van BC . [1]

Anders:

Er geldt: $(|AB| + |CD|) : |BC| = |AB| : |CE|$. [2]

Dus: $60 : 16 = 24 : |CE|$. Er volgt: $|CE| = 6\frac{2}{5}$.

En ook: $60 : 16 = |CD| : |BE|$. Er volgt: $|BE| = 9\frac{3}{5}$.

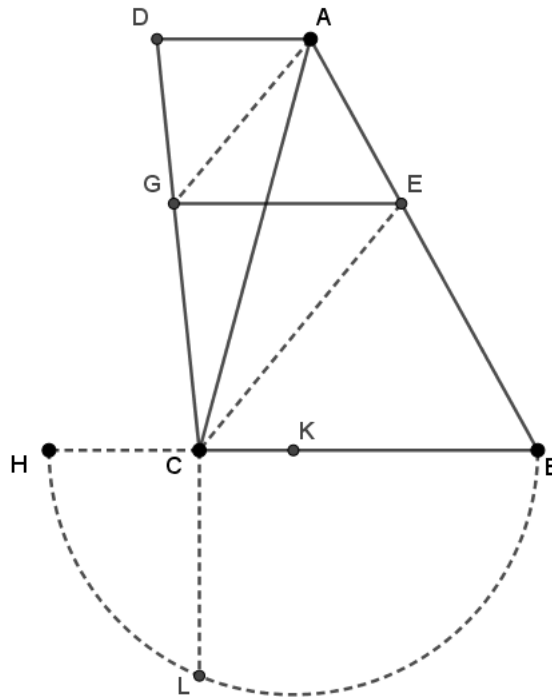
Opmerkingen:

[1] Dan is het hetzelfde betoog als met $\triangle KEL$ aldaar.

[2] Zie opmerking 3 bij Q78.

Q80 Trapezium in stukken delen 3

Zie figuur 1. Van vierhoek $ABCD$ is gegeven: AD is evenwijdig aan BC , $|AB| = 25$, $|BC| = 18$, $|CD| = 21\frac{2}{3}$, $|AD| = 8$. De lijn EG is evenwijdig aan AB gemaakt zodanig dat geldt: $opp(\triangle ABC) = opp(\triangle EGC)$. Gevraagd: $|EG|$, $|DG|$, $|AE|$.



Figuur 1

Punt H op verlengde van BC is zodanig dat $|CH| = |AD| = 8$.

CL is de loodlijn op middellijn BH van de cirkel met middelpunt K .

Dan geldt dus: $|CL|$ is de middelevenredige van $|CH|$ en $|BC|$, dus $|CL| = \sqrt{8 * 18} = 12$.

De bewering is nu: $|EG| = 12$.(*)

Want... $opp(\triangle ACE) = opp(\triangle GCE)$, dus AG is evenwijdig aan CE , zie prop. 37, boek I Euclides.

Dan volgt: $\triangle ADG$ is gelijkvormig met $\triangle EGC$.

Er geldt ook: $\triangle AGE$ is gelijkvormig met $\triangle ECB$.

Daaruit volgt: vierhoek $ADGE$ is gelijkvormig met vierhoek $EGCB$.

Dus: $|BC| : |EG| = |EG| : |AD|$.

En omdat $|AD| = |CH|$ volgt: $|EG|$ is ook de middelevenredige van $|CH|$ en $|BC|$. (*) is bewezen.

Er geldt verder:

$|CG| : |DG| = |BC| : |EG| = 18 : 12 = 3 : 2$.

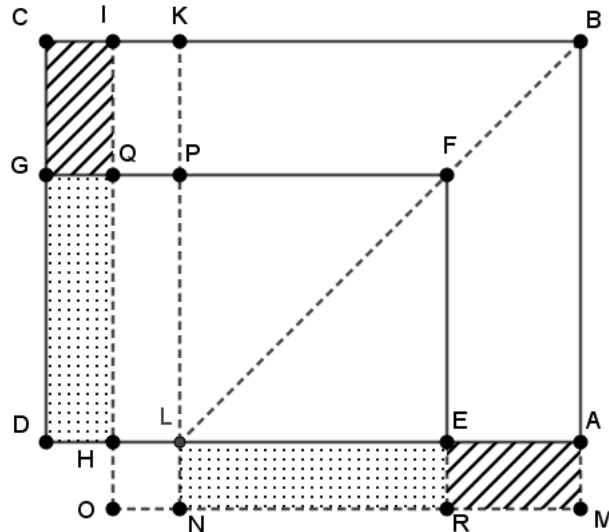
$|CG| + |DG| = 21\frac{2}{3}$. Dus: $|DG| = \frac{2}{5} * 21\frac{2}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Evenzo: $|BE| : |AE| = 3 : 2$.

Dus: $|AE| = 10$.

Q81 Rechthoek in stukken delen

Zie figuur 1. Een boer heeft een rechthoekig stuk land $ABCD$ met $|AB| = 12$, $|BC| = 16$. Hij wil dit verdelen in twee stukken, gelijk in oppervlakte: een rechthoek $DGFE$ en een gnomon. Er moeten gelden: de breedte van het gnomon ($|AE|$, $|CG|$) is overal gelijk. Gevraagd is hoe dit te doen.



Figuur 1

Maak eerst het vierkant $ABKL$ met dus zijden van lengte 12.

Dus: $|CK| = |DL| = 4$. De helft van rechthoek $KLDC$ namelijk $IHDC$ wordt nu bij AL geplaatst. Van het vierkant $BIOM$ ontbreekt dus nu vierkantje $LHON$.

Van rechthoek $EFGD$, met oppervlakte 96, is nu rechthoek $HQGD$ geplaatst bij EL .

Het gebied $RFQHLNR$ heeft dus ook oppervlakte 96.

Als hier nu vierkantje $LHON$, met oppervlakte 4, bij komt, dan ontstaat vierkant $FQOR$ met oppervlakte 100. Dus: $|RO| = |EH| = 10$.

En er volgt: $|DE| = |EH| + |DH| = 12$. En: $|DG| = \frac{96}{12} = 8$.

En ook volgt: $|AE| = |CG| = 4$.

Opmerking:

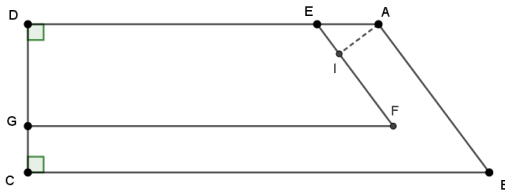
Algebraïsch eenvoudig te doen. Noem $|AE| = |CG| = x$, met $x < 12$.

Dan volgt: $opp(EFGD) = 96 = (12 - x)(16 - x)$.

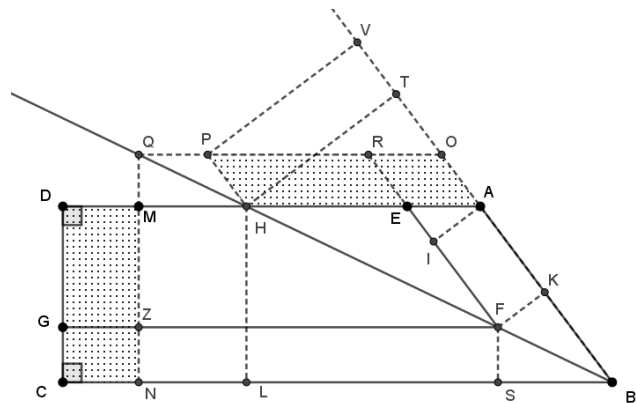
Ofwel: $x^2 - 28x + 96 = 0 = (x - 4)(x - 24)$, dus $x = 4$.

Q82 Trapezium in stukken delen 4

Zie figuur 1. Er is een vierhoekig stuk grond $ABCD$ waarvan AD evenwijdig is aan BC . Verder is gegeven: de hoeken bij C en D zijn recht en $|AD| = 38$, $|CD| = 16$, $|BC| = 50$. Dit stuk wordt in twee stukken, gelijk van oppervlakte, verdeeld met de lijnen FG , evenwijdig aan BC , en EF , evenwijdig aan AB . Dat gebeurt zodanig dat de 'breedte' van de winkelhaak overal gelijk is. Met de breedte wordt hier bedoeld $|AI|$ en $|CG|$. Gevraagd: $|AE|$, $|CG|$.



Figuur 1



Figuur 2

Zie nu figuur 2. Eenvoudig volgt: $|AB| = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

Omdat $|FK| = |FS|$ ligt F op de bissectrice van hoek B . Er volgt: $\triangle ABH$ is gelijkhoekig dus gelijkbenig. Dus: $|AH| = 20$ en dan $|DH| = 18$, $|BL| = 32$.

Neem nu punt M op lijn DH zodanig gelegen, dat geldt: $|HM| : |DM| = |BL| : |AH| = 32 : 20$.

Er volgt: $|DM| = \frac{20}{52} * |DH| = \frac{5}{13} * 18 = 6 \frac{12}{13}$, $|HM| = 11 \frac{1}{13}$.

Er geldt: $|OA| = |HP| = |DM|$ [1]

en $|HT| = |HL| = |CD|$ [2].

Dus: $opp(MNCD) = opp(VTHP) = opp(OAHP)$.

Gevolg: $opp(OBNMHP) = opp(ABCD) = 704$.

Kijk nu naar vierhoek $PHMQ$: die is gelijkvormig met vierhoek $ABLH$. (*)

Er volgt: $|HP|^2 : opp(PHMQ) = |AB|^2 : opp(ABLH)$.

Ofwel: $\left(6 \frac{12}{13}\right)^2 : opp(PHMQ) = 20^2 : 416$.

Dus: $opp(PHMQ) = 49 \frac{11}{13}$.

Gevolg: $opp(OBNQ) = 704 + 49 \frac{11}{13} = 753 \frac{11}{13}$.

En nu: $opp(RFZQ) = opp(OBNQ) - \frac{1}{2} opp(ABCD) = 401 \frac{11}{13}$

Met (*) volgt ook: $|AB| : |CD| = |HP| : |MQ|$.

Dus: $20 : 16 = 6 \frac{12}{13} : |MQ|$.

$|MQ| = 5 \frac{7}{13}$.

En dus: $|NQ| = |NM| + |MQ| = 21 \frac{7}{13}$.

Nu is NQ een zijde van vierhoek $OBNQ$ met oppervlakte $753 \frac{11}{13}$.

Er volgt: $opp(OBNQ) : |NQ|^2 = opp(RFZQ) : |QZ|^2$.

Dus: $753 \frac{11}{13} : 463 \frac{153}{169} = 401 \frac{11}{13} : |QZ|^2$.

Er volgt: $|QZ| = \sqrt{247 \frac{49}{169}}$. [3]

En dan: $|CG| = |NZ| = |NQ| - |QZ| = 21 \frac{7}{13} - \sqrt{247 \frac{49}{169}}$. (**)

En dit is ook $|AI|$.

Ten slotte: $|CD| : |AB| = |AI| : |AE|$.

Dus: $16 : 20 = \left(21 \frac{7}{13} - \sqrt{247 \frac{49}{169}}\right) : |AE|$. [4]

Gevolg: $|AE| = 26 \frac{12}{13} - \sqrt{386 \frac{66}{169}}$. [3]

Opmerkingen:

[1] Vierhoek $PHMQ$ is gelijkvormig met vierhoek $ABLH$.

Dus: $|HP| : |HM| = |AB| : |BL|$. Gevolg: $|HP| = \frac{20 * 11 \frac{1}{13}}{32} = 6 \frac{12}{13}$.

[2] Want punt H ligt op de bissectrice van hoek B .

[3] Gecontroleerd met hulp van *Wolfram Alpha* ...

[4] In HGQ ontbreekt $\frac{7}{13}$, een duidelijke zetfout.

Met enige algebra...

Noem $|CG| = x$, $\sphericalangle KBS = \theta$.

Er geldt dan: $\tan(\theta) = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$, $\sin(\theta) = \frac{4}{5}$, $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

En: $|DE| = |AD| - |AE| = 38 - \frac{5}{4}x$, $|GF| = |BC| - |BS| = 50 - 2x$. Want $\sphericalangle FBS = \frac{\theta}{2}$.

Dan is de oppervlakte van het trapezium $DEFG$ te bepalen:

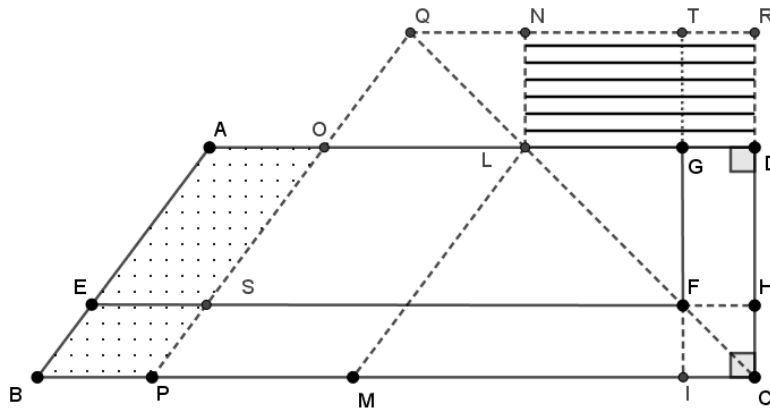
$opp(DEFG) = \frac{1}{2}|DG| * (|DE| + |GF|) = \frac{1}{2}(16 - x) \left(38 - \frac{5}{4}x + 50 - 2x\right) = 352$.

Ofwel: $13x^2 - 560x + 2816 = 0$.

En dezelfde worteluitdrukking als bij (**) verschijnt.

Q83 Trapezium in stukken delen 5

Zie figuur 1. Er is een vierhoek $ABCD$ waarvan AD evenwijdig is aan BC . Verder is gegeven: de hoeken bij C en D zijn recht en $|AD| = 38$, $|CD| = 16$, $|BC| = 50$. De vierhoek wordt in twee stukken, gelijk van oppervlakte, verdeeld met de lijnen FG , evenwijdig aan CD , en EF , evenwijdig aan BC . Dat gebeurt zodanig dat de 'breedte' van de winkelhaak overal gelijk is. Met de breedte wordt hier bedoeld $|FI|$ en $|FH|$. Gevraagd: $|BE|$, $|DG|$.



Figuur 1

Maak eerst: $|DL| = |CD|$. Er volgt: $|AL| = 22 = |MB|$, $|MC| = 28$.

En: $|MC| + |CD| = 44$.

Neem nu punt O op lijn AL zodanig gelegen, dat geldt: $|AO| : |OL| = |CD| : |MC| = 16 : 28$.

Er volgt dan: $|AO| : |AL| = |CD| : (|CD| + |MC|)$. [1]

Dus: $|AO| = \frac{16}{44} * 22 = 8$.

En: $|OL| = |AL| - |AO| = 14$. [1]

Op verlengde van CD ligt punt R zodanig dat $|DR| = |AO| = 8$.

Er volgt: $opp(CRQP) = \frac{1}{2}|CR| * (|PC| + |RQ|) = \frac{1}{2} * 24 * (42 + 24) = 792$.

En: $opp(SQTF) = opp(CRQP) - \frac{1}{2}opp(ABCD) = 792 - 352 = 440$.

En met verhouding: $opp(CRQP) : |CR|^2 = opp(SQTF) : |TF|^2$.

Waaruit volgt: $792 : 576 = 440 : |TF|^2$.

Dus: $|TF| = \sqrt{320}$.

En: $|FI| = |TI| - |TF| = 24 - \sqrt{320}$.

En omdat geldt: $|CD| : |HC| = |AB| : |BE|$,

volgt: $16 : (24 - \sqrt{320}) = 20 : |BE|$.

$|BE| = 30 - \sqrt{500}$.

Opmerkingen:

[1] Volgorde iets anders genoteerd en korter afgeleid dan in HGQ.

Q84 Vierhoek in stukken delen 1

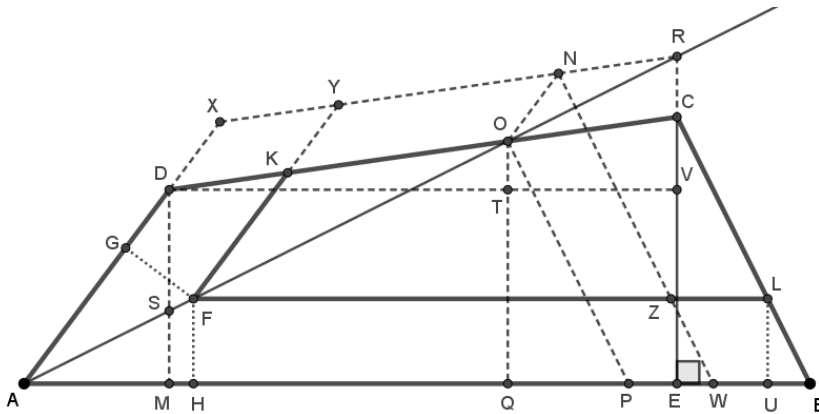
Zie figuur 1. Een boer heeft een vierhoekig stuk grond $ABCD$, waarvoor geldt:

$$|AB| = 65, |BC| = \sqrt{605}, |CD| = \sqrt{1800}, |AD| = 20, \text{loodlijn } |CE| = 22.$$

Dit stuk moet verdeeld worden in twee delen, gelijk van oppervlakte, zodat geldt:

$$KF \text{ evenwijdig aan } AD, FL \text{ evenwijdig aan } AB, \text{ en } |GF| = |FH|. [1]$$

Gevraagd: $|GF|, |FH|, |DK|, |BL|$.



Figuur 1

Met Pythagoras is te vinden: $|BE| = 11$. Dus $|AE| = 54$.

Met Q73 is te vinden: $|DM| = 16$. [2]

En dus: $|AM| = 12, |ME| = |DV| = 42$.

En er volgt:

$$\text{opp}(ABCD) = \text{opp}(\triangle BCE) + \text{opp}(\triangle ADM) + \text{opp}(CDME) = 121 + 96 + 798 = 1015.$$

Nu: $|AM| + |AD| = 32$. Er volgt:

$$32 : |MD| = |AD| : |DS|. \text{ Dus: } |DS| = 10.$$

$$32 : |MD| = |AM| : |MS|. \text{ Dus: } |MS| = 6.$$

Dit volgt uit propositie 3, boek IV Euclides. [3]

Er geldt: $\triangle AMS$ is gelijkvormig met $\triangle AER$,

dus: $|AM| : |MS| = |AE| : |ER|$ met gevolg: $|ER| = 27$.

En dus: $|CR| = 27 - 22 = 5$.

Er geldt ook: $\triangle DOS$ is gelijkvormig met $\triangle COR$, [4]

$$\text{dus: } |DO| : |CO| = |DS| : |CR| = 10 : 5$$

$$\text{en } |DO| + |CO| = |CD| = \sqrt{1800}.$$

$$\text{Er volgt: } |DO| = \frac{10}{15} * \sqrt{1800} = \sqrt{800}, \text{ en: } |CO| = \frac{5}{15} * \sqrt{1800} = \sqrt{200}.$$

$$|CV| = |CE| - |VE| = |CE| - |DM| = 6.$$

Er geldt: $\triangle DOT$ is gelijkvormig met $\triangle DCV$, (*)

$$\text{dus: } |OT| : |DO| = |CV| : |CD| \text{ met gevolg: } |OT| = \frac{6}{\sqrt{1800}} * \sqrt{800} = 4.$$

En dus: $|OQ| = 16 + 4 = 20$.

Maak nu OP evenwijdig aan BC .

Er geldt: $\triangle OQP$ is gelijkvormig met $\triangle CEB$, en dan volgt: $|QP| = 10, |OP| = \sqrt{20^2 + 10^2} = \sqrt{500}$.

Uit (*) volgt ook: $|DT| = \frac{10}{15} * |DV| = 28$.

Er volgt: $|PA| = |PQ| + |QM| + |MA| = 10 + 28 + 12 = 50$.

Nu zijn bekend: $|AP| = 50, |OP| = \sqrt{500}, |DO| = \sqrt{800}, |AD| = 20, |BP| = 15$.

[Na al deze berekeningen over lengtes nu een overstap naar oppervlakten in HGQ]

Eerst: $opp(ADOP) = 700$. [5]

Bekend: $opp(ABCD) = 1015$.

Verdeel nu BP in twee stukken met verhouding: $|BW| : |WP| = |AD| : |AP|$.

Dan geeft: $|BW| = \frac{20}{70} * 15 = 4\frac{2}{7}, |WP| = 10\frac{5}{7}$.

Met $|DX| = |BW|$ volgt: $|AX| = 24\frac{2}{7}$.

Verder geldt: $|AW| = |AP| + |PW| = 60\frac{5}{7}$. [6]

De vierhoek $AXNW$ is nu gelijkvormig met vierhoek $ADOP$.

Er volgt: $|AD|^2 : |AX|^2 = |OD|^2 : |NX|^2$. Dat geeft: $|NX| = \sqrt{1179\frac{29}{49}}$.

En: $|AD|^2 : |AX|^2 = |OP|^2 : |NW|^2$. [7] Dat geeft: $|NW| = \sqrt{737\frac{12}{49}}$.

En er volgt: $opp(AXNW) : opp(ADOP) = |AX|^2 : |AD|^2$.

Dat geeft: $opp(AXNW) = 1032\frac{1}{7}$.

Dus: $opp(FYNZ) = opp(AXNW) - \frac{1}{2} opp(ABCD) = 524\frac{9}{14}$.

Er volgt: $opp(FYNZ) : opp(ADOP) = |NZ|^2 : |OP|^2$. Dat geeft: $|NZ| = \sqrt{374\frac{73}{98}}$.

Ook: $opp(FYNZ) : opp(ADOP) = |NY|^2 : |DO|^2$. Dat geeft: $|NY| = \sqrt{599\frac{29}{49}}$.

En tenslotte:

$$|DK| = |XY| = |NX| - |NY| = \sqrt{1179\frac{29}{49}} - \sqrt{599\frac{29}{49}}$$

$$|BL| = |WZ| = |NW| - |NZ| = \sqrt{737\frac{12}{49}} - \sqrt{374\frac{73}{98}}$$

En uit gelijkvormigheid van ΔBUL en ΔBEC volgt:

$$|FH| = |GF| = |BU| = 24\frac{2}{7} - \sqrt{299\frac{39}{49}}$$

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat KFL is evenwijdig aan DAB , maar wat bedoeld is, is duidelijk.

[2] Via $|AC|$, hoogtelijn in ΔACD , etc.

[3] Hier wordt de bissectricestelling toegepast: AF is een bissectrice want $|FH| = |FG|$.

Andere formulering: AS bissectrice $\Leftrightarrow |AM| : |AD| = |MS| : |DS|$.

[4] Hier iets anders genoteerd dan in HGQ.

[5] Sommeer de oppervlakten van drie rechthoekige driehoeken en de rechthoek $DTQM$.

[6] In HGQ staat foutief $|AV|$.

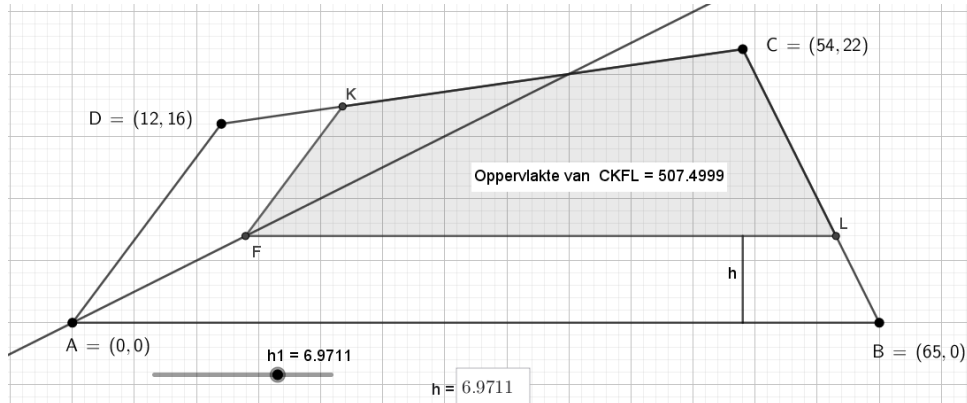
[7] In HGQ staat foutief $|NV|$.

Een hele rekenpartij. Het vergt ruim twee pagina's in HGQ. Gelukkig is er nu *Wolfram Alpha*, maar Cardinael deed dit allemaal handmatig! Het praktisch nut voor de boer is gering met al die wortel-uitdrukkingen.

Dat $|FH| = |GF| = 6,97 \dots$ voet, daar heeft die boer meer aan: bijna 7 voet.

Dat daagt uit het probleem meer numeriek aan te pakken, waarbij niets afgedaan wordt aan de prachtige meetkundige aanpak van Cardinael.

Grafisch, dus numeriek, met *GeoGebra*, zie figuur 2.



Figuur 2

Algebraïsch:

De basisgegevens zijn bekend en $|AC| = \sqrt{3400}$, $|BD| = \sqrt{3065}$.

Dan volgen eventueel met de cos-regel de hoeken:

$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5}, \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}, \tan(\beta) = 2, \cos(\gamma) = -\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos(\delta) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \quad (\delta = 135^\circ).$$

Dan volgt: $|BL| = \frac{h}{\sin(\beta)} = \frac{h}{22} * \sqrt{605}$. En: $|DK| = h\sqrt{2}$.

$$\text{Dus: } opp(\triangle CKL) = \frac{1}{2}|CL| * |CK| \sin(\gamma) = \frac{1}{2}(|BC| - |BL|)(|AD| - |DK|) * \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{En: } |FL| = |AB| - \frac{h}{\tan(\frac{\alpha}{2})} - \frac{h}{2} = |AB| - \frac{5}{2}h. \text{ En: } |FK| = |AD| - \frac{h}{\tan(\frac{\alpha}{2})} + h = |AD| - h.$$

$$\text{Dus: } opp(\triangle FKL) = \frac{1}{2}|FK| * |FL| * \sin(\alpha).$$

Samengevat:

$$opp(\triangle CFKL) = \frac{1}{2}(|BC| - |BL|) * (|AD| - |DK|) * \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{2}|FK| * |FL| * \frac{4}{5} = \frac{1}{2} * 1015.$$

Alles ingevuld geeft dat voor h:

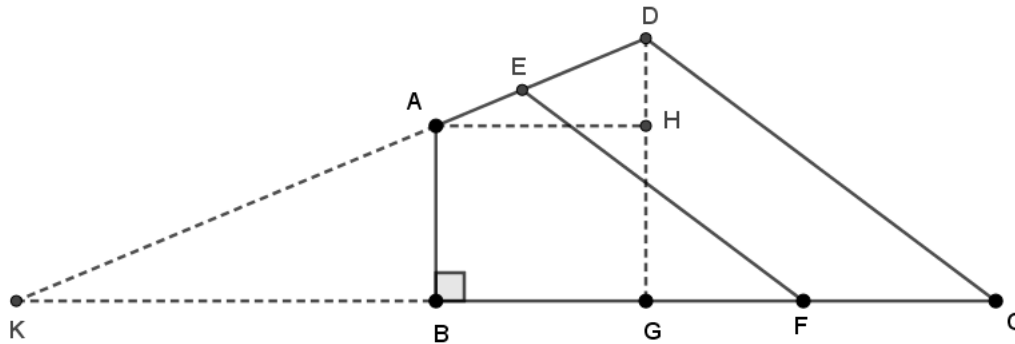
$$\left(\sqrt{605} - \frac{h}{22} * \sqrt{605}\right) * \left(\sqrt{1800} - h\sqrt{2}\right) * \frac{3}{\sqrt{10}} + \left(65 - \frac{5}{2}h\right) * (20 - h) * \frac{4}{5} = 1015.$$

$$\text{En dan volgt: } \frac{7}{2}h^2 - 170h + 1015 = 0.$$

$$\text{En: } h = \frac{1}{7}(170 - \sqrt{14690}) = 6,9711 \dots$$

Q85 Vierhoek in stukken delen 2

Zie figuur 1. Een vierhoekig stuk grond $ABCD$, met hoek B recht, moet in twee stukken van gelijke oppervlakte verdeeld worden. De delende lijn EF moet evenwijdig zijn aan CD . Verder is gegeven: $|AB| = 10$, $|BC| = 32$, $|CD| = 25$, $|AD| = 13$. Gevraagd: $|DE|$, $|CF|$.



Figuur 1

Met hetgeen in Q74 is geleerd kan gevonden worden voor de loodlijnen DG en AH :

$$|DG| = 15, |DH| = 5, |AH| = 12.$$

Uit gelijkvormigheid van de driehoeken DAH en DKG volgt:

$$|DH| : |AH| = |DG| : |KG|.$$

$$\text{Dus: } |KG| = 36.$$

$$\text{En dan: } |KC| = 56, |CG| = 20.$$

Ook is dan te berekenen: $opp(ABCD) = 300$.

$$\text{Er volgt: } opp(\triangle KEF) = opp(\triangle KDC) - \frac{1}{2} opp(ABCD) = \frac{1}{2} * 56 * 15 - 150 = 270.$$

$$\text{En dan: } opp(\triangle KDC) : |KC|^2 = opp(\triangle KEF) : |KF|^2.$$

$$\text{Dus: } |KF|^2 = \frac{270 * 56^2}{420} = 2016. \text{ Dus: } |KF| = \sqrt{2016}.$$

$$\text{Er volgt: } |CF| = |KC| - |KF| = 56 - \sqrt{2016}.$$

$$\text{En: } |DE| = 39 - \sqrt{977 \frac{11}{14}}. [1]$$

Opmerking:

[1] Dit gaat nu snel.

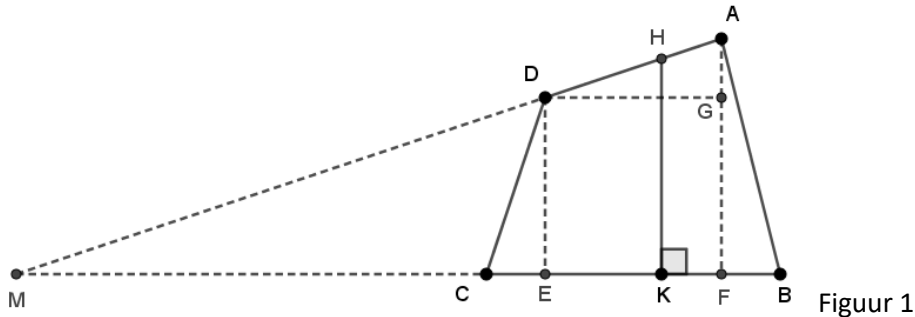
$$\text{Eerst: } |DK| = \sqrt{36^2 + 15^2} = 39.$$

$$\text{Dan met verhouding: } |DE| : |DK| = |CF| : |CK|.$$

In HGQ ontbreekt hier het wortelteken.

Q86 Vierhoek in stukken delen 3

Zie figuur 1. De vierhoek $ABCD$ moet in twee stukken verdeeld worden, gelijk van oppervlakte, zodat de deellijn HK loodrecht staat op BC . Gegeven is: $|BC| = 50$, $|BF| = 10$, $|EF| = 30$, $|CE| = 10$, waarbij E en F de voetpunten zijn van loodlijnen. Er geldt ook: $|DE| = 30$, $|AF| = 40$.
 Gevraagd: $|HK|$, $|CK|$, $|DH|$.



Met $|AG| = 10$ volgt met verhoudingen: $|AG| : |DG| = |DE| : |EM|$. Dus: $|EM| = 90$.

En er volgt: $opp(\triangle DEM) = \frac{1}{2}|DE| * |EM| = 1350$.

En: $opp(\triangle HKM) = opp(\triangle DEM) + opp(\triangle EDHK) = 1350 + 550 = 1900$. [1]

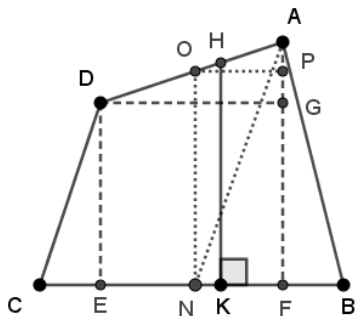
En dan: $|HK|^2 = 1266\frac{2}{3}$. Dus: $|HK| = \sqrt{1266\frac{2}{3}}$. [2]

Verder: $opp(\triangle DEM) : |EM|^2 = opp(\triangle HKM) : |KM|^2$. Dus: $|KM| = \sqrt{11400}$.

Dus: $|CK| = |KM| - |CM| = \sqrt{11400} - 80$.

Met Pythagoras volgt verder: $|DH| = |HM| - |DM| = \sqrt{12666\frac{2}{3}} - \sqrt{9000}$.

Anders:



Figuur 2

Nu met figuur 2.

Eerst: $|BN| = opp(ABCD)/|AF| = 1400/40 = 35$.

Dan: $|DG| : |AG| = |OP| : |AP|$.

En met $|OP| = |FN| = 25$

volgt: $30 : 10 = 25 : |AP|$. Dus: $|AP| = 8\frac{1}{3}$.

Dan: $|ON| = |PF| = |AF| - |AP| = 31\frac{2}{3}$.

En met $|HK|$ middelevenredige van $|ON|$ en $|AF|$ [3]

volgt: $|HK| = \sqrt{1266\frac{2}{3}}$.

Opmerkingen:

[1] Want: $opp(\triangle EDHK) = \frac{1}{2}opp(ABCD) - opp(\triangle DCE) = \frac{1}{2} * 1400 - 150 = 550$.

[2] Via: $|HK|^2 : |DE|^2 = opp(\triangle HKM) : opp(\triangle DEM)$.

[3] Zonder uitleg. Dat dit waar is, is numeriek wel te bewijzen, zie weer figuur 1.

$|AF|^2 \sim opp(\triangle AFM) = \frac{1}{2} * 40 * 120 = 2400$. Dus: $|AF|^2 = c * 2400$.

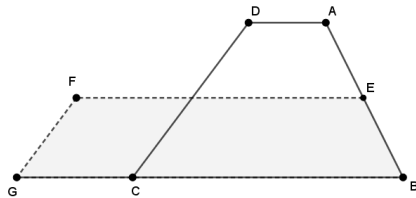
$|ON|^2 \sim opp(\triangle ONM) = \frac{1}{2} * 31\frac{2}{3} * 95 = 1504\frac{1}{6}$, $|HK|^2 \sim opp(\triangle HKM) = 1900$.

En inderdaad: $c * 1900 = \sqrt{c * 2400} * \sqrt{c * 1504\frac{1}{6}}$. Dus ja: $|HK|^2 = |AF| * |ON|$.

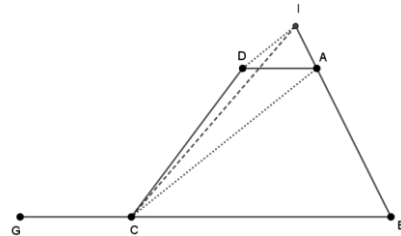
NB: de evenredigheidsfactor $c = 2 * \tan(\sphericalangle M) = \frac{2}{3}$.

Q87 Aanpassing trapezium 1

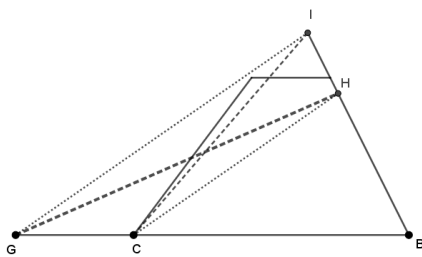
Zie figuur 1. De gegeven vierhoek $ABCD$ met AD evenwijdig aan BC moet veranderd worden in een ander 'langer' vierhoek, zodat BG de nieuwe basis is én alle zijden evenwijdig lopen aan de zijden van de gegeven vierhoek. Gevraagd is hoe dit te doen. [1]



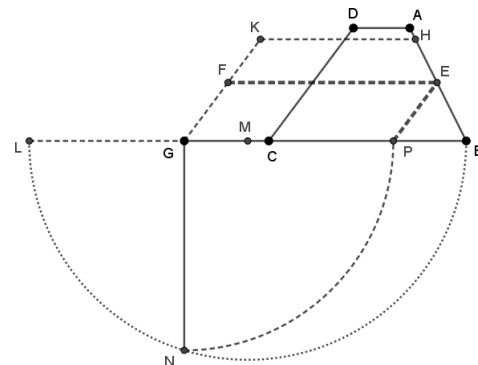
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

Om dit te doen wordt eerst de vierhoek aangepast naar een driehoek BIC met dezelfde hoek ABC en als basis BC . Zie figuur 2. Vervolgens wordt deze driehoek weer aangepast naar een driehoek BGH met dezelfde hoek ABC maar nu met basis BG . Zie figuur 3.

Trek nu een lijn vanuit G evenwijdig aan CD en een lijn vanuit H evenwijdig aan BG : snijpunt K .

Zie verder figuur 4. Op het verlengde van BG ligt punt L zodanig dat $|GL| = |HK|$.

De loodlijn te G snijdt het halve cirkel met middelpunt M in punt N .

Maak nu punt P op lijn BG zodanig dat $|GP| = |GN|$. Trek door P een lijn evenwijdig aan GK .

Die lijn snijdt AB in een punt E . Trek dan een lijn door E evenwijdig aan BG die GK snijdt in punt F .

Omdat geldt: $|EF| (=|GF| = |GN|)$ is de middelevenredige tussen $|BG|$ en $|HK| (= |GL|)$ [2] volgt, met het geleerde in Q80: $opp(\triangle ABC) (= opp(\triangle BGH)) = opp(EFGB)$.

En de methode om dit te doen is gevonden...

Opmerking:

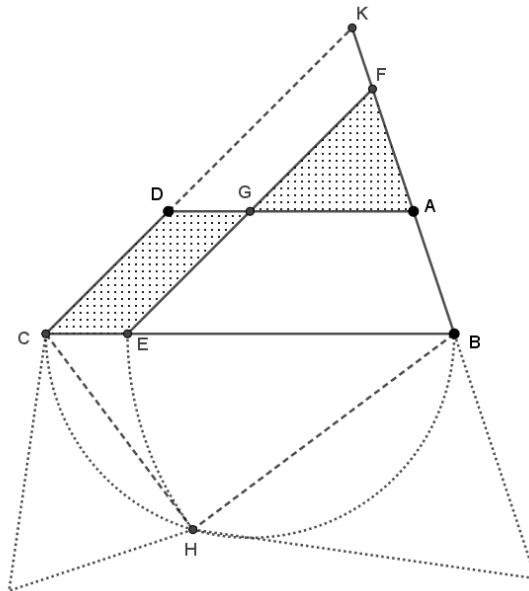
[1] Dit is een eerste kwestie van een hele reeks waarin geen getallen meer verschijnen. Het is meer een constructievraagstuk.

In figuur 1 is goed te zien wat bedoeld wordt met 'evenwijdig lopen aan de zijden...' en verder geldt dat de twee vierhoeken gelijke oppervlakten dienen te hebben. Dit aanpassen van meetkundige figuren met enige behoudskenmerken is een bekend thema in de Griekse meetkunde.

[2] In HGQ staat foutief MK i.p.v. HK .

Q88 Aanpassing trapezium 2

Zie figuur 1. De gegeven vierhoek $ABCD$ met AD evenwijdig aan BC moet veranderd worden in een driehoek met dezelfde hoeken als bij B en C . Noem die ΔBFE . Verder moet gelden: EF is evenwijdig aan CD én $opp(CEGD) = opp(\Delta AGF)$. Gevraagd is hoe dat te doen.



Figuur 1

Maak op BC een halve cirkel en pas vanuit C een lijnstuk $|AD|$ af: dat is CH .

Cirkel vervolgens $|BH|$ om zodat $|BE| = |BH|$, met E dus op lijn BC .

Trek dan een lijn vanuit E evenwijdig aan CD die het verlengde van BA snijdt in een punt F .

Dan geldt: ΔBFE is de gevraagde driehoek.

En: $opp(\Delta BFE) = opp(ABCD)$ ofwel $opp(CEGD) = opp(\Delta AGF)$.

Want: $opp(\Delta BCK) - opp(\Delta ADK) = opp(ABCD)$.

Op de zijden CH en BH staan driehoeken, gelijkvormig aan ΔBCK .

De driehoek op zijde CH is dan zelfs 'gelijk' [congruent] aan ΔADK , want $|AD| = |CH|$.

Hoek CHB is recht en dan volgt met propositie 31, boek VI Euclides, bij gelijkvormige driehoeken:

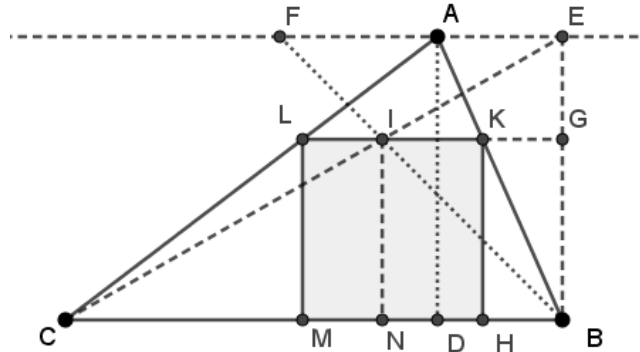
$opp(\Delta BCK) = opp(\text{driehoek op zijde } BH) + opp(\text{driehoek op zijde } CH)$.

Dus:

$opp(BFE) = opp(\Delta \text{ zijde } BH) = opp(\Delta BCK) - opp(\Delta \text{ zijde } CH)$
 $= opp(\Delta BCK) - opp(\Delta ADK) = opp(ABCD)$.

Q89 Vierkant binnen driehoek

Zie figuur 1. Binnen de gegeven $\triangle ABC$ moet een vierkant komen met een zo groot mogelijke oppervlakte. Gevraagd is hoe dat te doen.



Figuur 1

Om dit te doen, richt een loodlijn op te B zodat $|BE| = |AD|$. AD is een hoogtelijn in $\triangle ABC$. De lijn BF is een bissectrice van hoek EBC en die snijdt lijn CE in punt I . Dan is $|IN|$ de lengte van de zijde van het gevraagde vierkant.

Met lijn GI evenwijdig aan BC ontstaan de snijpunten K en L met de zijden. Dan LM en KH evenwijdig aan lijn AD getrokken geeft vierkant $KLMN$, zo groot 'als het mogelijk' is in de gegeven driehoek. [1]

Want: BI is een bissectrice dus vierhoek $GINB$ is een vierkant.

Omdat $|GI| : |BC| = |EG| : |EB| = |AK| : |AB| = |KL| : |BC|$ volgt: $|KL| = |GI|$.

En dan ook: $|LM| = |KH| = |BG| = |IN| = |IG|$.

Vierkant $KLMN$ is dus even groot als vierkant $GINB$.

Anders:

Om zo iets te doen met getallen, neem dan $|BC| = 14$, $|AD| = 12$.

Dat geeft: $2 * opp(\triangle ABC) = 12 * 14 = 168$.

En dan: $\frac{168}{|BE|+|BC|} = \frac{168}{26} = 6\frac{6}{13} = |GI| = |IN|$, en dat zijn ook de zijden van vierkant $KLMN$. [2]

Opmerkingen:

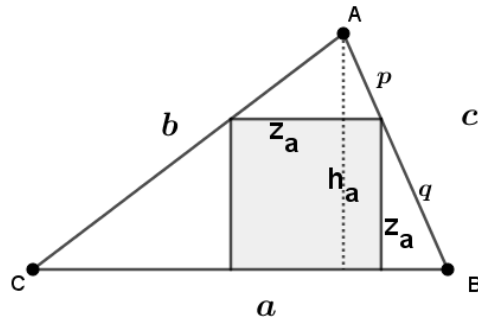
[1] Dit klopt met een zijde op BC gelegen, maar wat als die zijde op AB of AC ligt? Is zo'n vierkant dan kleiner? Cardinael vindt een vierkant maar bewijst niet dat die zo groot als mogelijk is.

[2] Dit getallenvoorbeeld voegt niets toe en bewijst niet wat bij [1] staat.

Met enige analytische meetkunde is meer te concluderen voor vierkanten op een zijde.

Zie figuur 2. Hoogtelijnen uit punt ... h_A, h_B, h_C , de zijden van de vierkanten op zijde ... z_a, z_b, z_c .

Dan volgt voor zo'n situatie als boven:



Figuur 2

Met gelijkvormigheid: $\frac{z_a}{h_a} = \frac{q}{c}$. En ook: $\frac{z_a}{a} = \frac{p}{c}$.

Dus: $\frac{z_a}{h_a} + \frac{z_a}{a} = \frac{q}{c} + \frac{p}{c} = 1$.

Gevolg: $z_a = \frac{a \cdot h_a}{a + h_a} = \frac{2 \cdot opp(\Delta ABC)}{a + h_a}$. (*)

Cardinael gebruikt in het getallenvoorbeeld: $a = 14$.

De andere zijden zijn nog te kiezen.

Met $(a, b, c) = (14, 15, 13)$ zou volgen: $opp(\Delta ABC) = 84$.

En: $(h_A, h_B, h_C) = (12, 11\frac{1}{5}, 12\frac{12}{13})$

En: $(a + h_A, b + h_B, c + h_C) = (26, 26\frac{1}{5}, 25\frac{12}{13})$

(*) heeft de grootste waarde bij een gegeven driehoek indien de noemer het kleinst is.

Dus bij $(a, b, c) = (14, 15, 13)$ geeft dat een vierkant op zijde AB: $z_c = 6\frac{162}{337} = 6,48 \dots$

Het getallenvoorbeeld geeft: $z_a = 6,46 \dots = 6\frac{6}{13}$, dus in dit geval niet de grootste zijde.

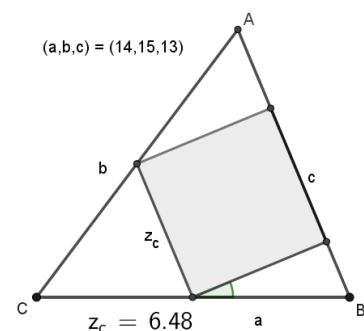
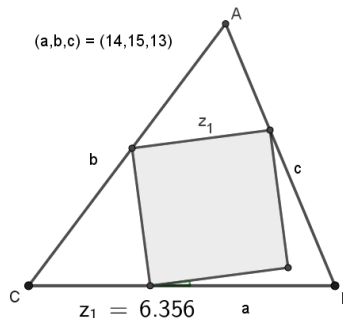
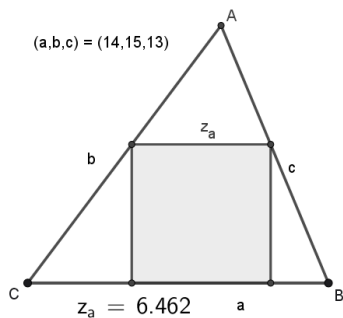
Met enige analyse volgt dat bij $opp(\Delta ABC) = 84$ geldt:

$$z_a = \frac{168}{a + \frac{168}{a}} = \frac{168a}{a^2 + 168}$$

De zijde z_a is maximaal voor $a = \sqrt{168} \approx 12,96 \dots$ En ook volgt: $h_A = \sqrt{168}$.

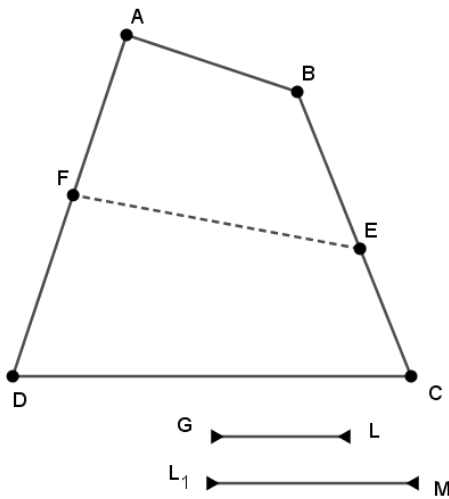
Dus het grootste vierkant ontstaat voor deze waarden of hier zo dicht mogelijk bij!

Met de figuren hieronder is een en ander in beeld gebracht.

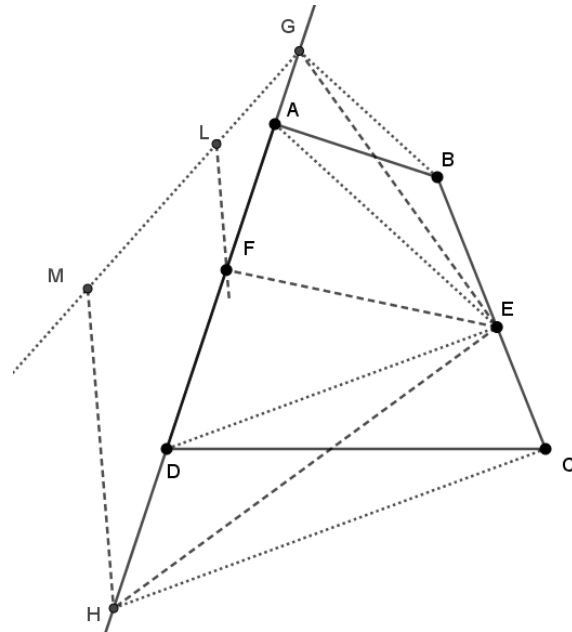


Q90 Vierhoek in stukken delen 4

Zie figuur 1. De 'onghelijkzijdighe' vierhoek $ABCD$, met een punt E op zijde BC , moet verdeeld worden met een lijn EF in twee stukken $ABEF$ en $FECD$ zodanig dat die stukken, in grootte, zich verhouden als de gegeven lijnstukken GL en LM . Gevraagd is hoe dat te doen.



Figuur 1



Figuur 2

Om dit te doen, trek lijn door B evenwijdig aan AE . Zie figuur 2.

Dat geeft met het verlengde van DA het snijpunt G en er geldt: $opp(\triangle AEB) = opp(\triangle AEG)$. [1]

Volgens propositie 37, boek I Euclides.

Evenzo een lijn door C evenwijdig aan DE getrokken geeft een snijpunt H .

En er geldt: $opp(\triangle DEC) = opp(\triangle DEH)$.

Gevolg: $opp(\triangle GEH) = opp(ABCD)$.

Trek vanuit G een lijn zolang als $|GL| + |LM|$. Verbind M met D en trek door L een lijn evenwijdig aan lijn DM . Die lijn snijdt AD in het gevraagde punt F .

Want: $|GL| : |LM| = |GF| : |FD|$.

Er volgt dan: $|GL| : |LM| = opp(\triangle FEG) : opp(\triangle FHE)$.

En omdat

$opp(\triangle FEG) = opp(\triangle FAE) + opp(\triangle GAE) = opp(\triangle FAE) + opp(\triangle BAE) = opp(ABEF)$

en analoog: $opp(\triangle FHE) = opp(FECD)$

is dus vierhoek $ABCD$ verdeeld in twee stukken in de verhouding $|GL|$ staat tot $|LM|$.

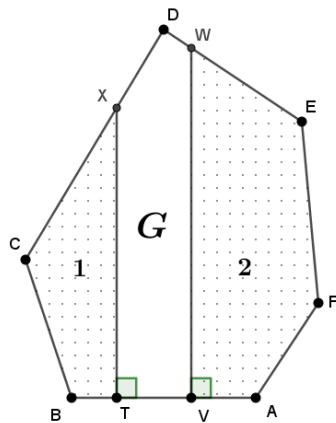
Opmerking:

[1] In HGQ staat in figuur 2 lijnstuk CG getekend i.p.v. lijnstuk EG .

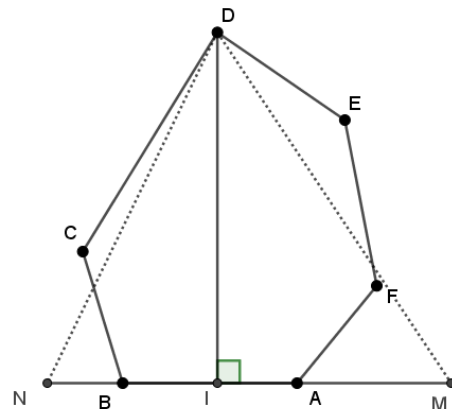
Q91 Zeshoek in stukken delen

Zie figuur 1. Uit een gegeven zeshoek $ABCDEF$ met ongelijke zijden wil men een strook snijden loodrecht op zijde AB , soortgelijk aan G met dezelfde grootte, zodanig dat de oppervlaktes van de overblijvende stukken $AVWEF$ en $TXCB$ zich verhouden als $2 : 1$. [1]

De vraag is hoe dat 'geometrisch' te doen.



Figuur 1

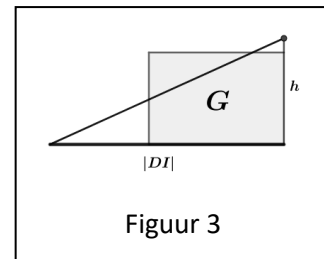


Figuur 2

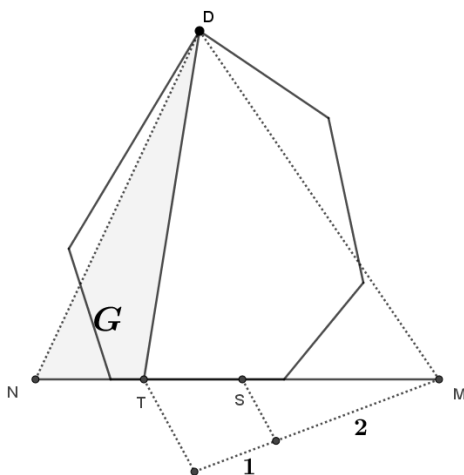
Zie figuur 2. Maak eerst een driehoek met hoogtelijn DI en oppervlakte gelijk aan $ABCDEF$. Dat geeft $\triangle DMN$. [2]

Maak soortgelijk een rechthoekige driehoek met DI als basis en oppervlakte gelijk aan G . Die heeft hoogte h . Zie figuur 3.

[In HGQ iets anders dan hier: rechthoek heeft $opp(G)$.]



Figuur 3



Figuur 4

Zie nu figuur 4. Lengte h wordt afgepast vanuit N : punt T .

Dan heeft $\triangle DNT$ gelijke oppervlakte als G .

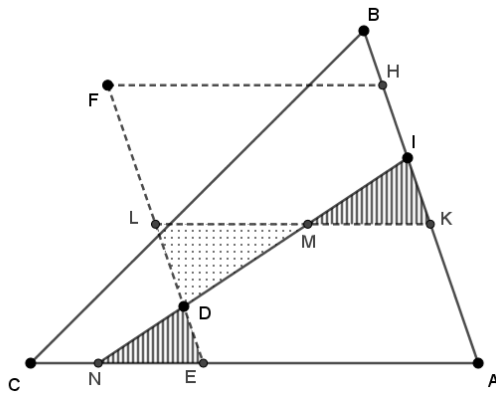
En: $opp(\triangle DTM) = opp(\text{restant zeshoek})$.

Dat restant wordt nu verdeeld.

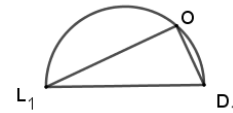
Het lijnstuk MT wordt verdeeld door S met $|MS| : |ST| = 2 : 1$.

Q92 Driehoek in stukken delen 2

Zie figuur 1. Iemand heeft een driehoekig stuk grond ABC , met ongelijke zijden. Daarin is een punt D gegeven waar men een rechte sloot doorheen wil graven zodanig dat daardoor het stuk grond in twee even grote stukken verdeeld wordt. De vraag is hoe dit geometrisch te doen.



Figuur 1



Figuur 2

Door de ligging van punt D zal de 'scheplijn' moeten lopen naar een punt op zijde AB .

Trek nu een lijn door D evenwijdig aan AB . Die lijn loopt tot punt F zodanig dat er geldt:

$$opp(HAEF) = opp(\Delta ABC). [1]$$

De lijn KL deelt het parallellogram in twee. (*)

Nu dient een lijn door D getrokken te worden zodanig dat geldt voor de afgesneden driehoeken:

$$opp(\Delta MDL) = opp(\Delta KIM) + opp(\Delta DEN). (**)$$

Want dan volgt:

$$opp(\Delta ANI) = opp(AEDMK) + opp(\Delta KIM) + opp(\Delta DEN) = opp(AEDMK) + opp(\Delta MDL).$$

$$\text{Dus: } opp(\Delta ANI) = opp(KAEL) = \frac{1}{2} opp(\Delta ABC). \text{ Zie (*).}$$

(**) Hoe dit te doen?

Zie schets in figuur 2. De zijde DL is bekend, nu weergegeven met D_1L_1

Pas nu $|DE|$, ook bekend, af vanaf D_1 : dat geeft op de cirkel punt O .

Maak nu punt I op lijn KH zodanig dat $|KI| = |OL_1|$.

Alle drie de gemarkeerde driehoeken in figuur 1 zijn gelijkvormig.

Met $\Delta MDL, \Delta DEN, \Delta KIM$ geplaatst op respectievelijk D_1L_1, OD_1, OL_1 volgt hetgeen bij (**) bewezen moet worden uit propositie 31, boek VI Euclides.

Dus is de lijn door N en I de gevraagde lijn.

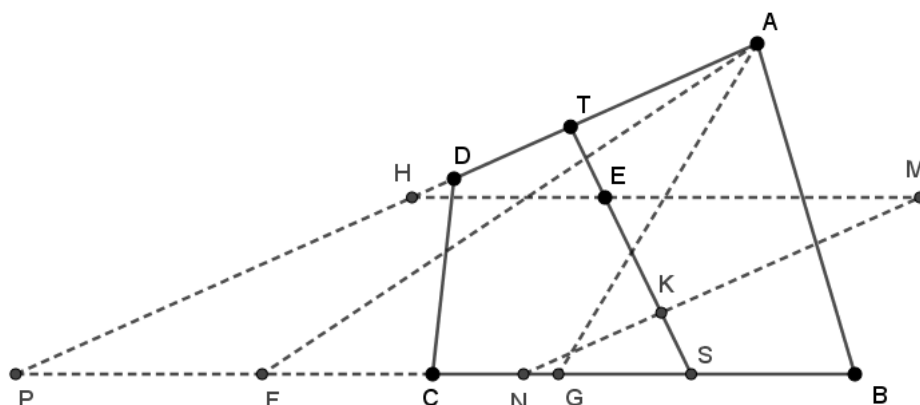
Opmerkingen:

[1] Hoe dit te doen wordt niet uitgelegd in HGQ. Omdat geldt: $Opp(\Delta ABC) = \frac{1}{2} |AC| * |AB| * \sin(\sphericalangle A) = |AE| * |AH| * \sin(\sphericalangle A)$ is lengte $|AH|$ te construeren, dus ook $|AF|$.

Dat er mogelijk meer oplossingen zijn, wordt niet besproken. Als D het zwaartepunt van de driehoek is, dan zijn er zelfs drie oplossingen.

Q93 Vierhoek in stukken delen 5

Zie figuur 1. Een vierhoek $ABCD$, met ongelijke zijden [1] is gegeven. Daarin is een punt E gegeven waar men een rechte lijn doorheen wil trekken zodanig dat daardoor de vierhoek in twee even grote delen verdeeld wordt. De vraag is hoe dit geometrisch te doen.



Figuur 1

Om dit te doen, verleng BC en AD : snijpunt P . Maak nu een driehoek ABF even groot als de vierhoek $ABCD$ en met *hoek* ABC . [2]

Met G midden van BF wordt deze driehoek in twee even grote driehoeken verdeeld: $\triangle AGB$ en $\triangle AGF$.

Trek nu door E een lijn evenwijdig aan BP . Vanuit snijpunt H wordt een lijnstuk HM zodanig gezet zodat $opp(\triangle AGP) = opp(\triangle HMP)$. [In HGQ:] Dit is op 'verscheyden' manieren te doen. [3]

Trek nu door E de lijn TS zodanig dat $opp(\triangle MEK) = opp(\triangle TEH) + opp(\triangle SKN)$
... zoals in Q92 geleerd is. [4]

Er volgt: $opp(\triangle TSP) = opp(\triangle MHPN) = opp(\triangle AGP)$.

En: $opp(\triangle TSCD) = opp(\triangle TSP) - opp(\triangle DCP) = opp(\triangle AGP) - opp(\triangle APF) = opp(\triangle AGF)$. [5]

En: $opp(\triangle AGF) = \frac{1}{2} opp(\triangle ABF) = \frac{1}{2} opp(\triangle ABCD)$.

Dus lijn TS is de gevraagde lijn.

Opmerkingen:

[1] Een zogenaamde 'ongheschikte' vierhoek maar wel convex.

[2] Dit is ondertussen een standaardconstructie in HGQ geworden.

[3] Bijvoorbeeld via: $\frac{1}{2} |PG| * |PA| = |PH| * |PG|$. En: $|HM| = |PG|$.

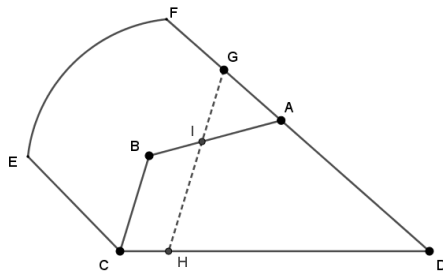
[4] De punten E, H en M zijn bekend en dus te gebruiken als in figuur 2 bij Q92.

Vanuit punt N is daarna punt S te vinden: $|NS|^2 = |EM|^2 - |EH|^2$.

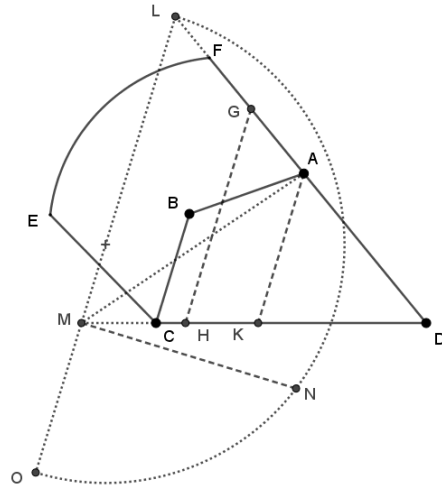
[5] Want: $opp(\triangle DCP) = opp(\triangle APF)$. Zo zijn P en F geconstrueerd!

Q94 Aanpassing vierhoek

Zie figuur 1. Twee boeren hebben elk een bijzonder stuk land, liggend naast elkaar. Het ene stuk $ABCD$ en het andere stuk $ABCEF$ worden gescheiden door een 'krommen' sloot $A - B - C$. Nu willen zij een rechte sloot graven evenwijdig aan BC zonder landverlies voor elk dus er moet gelden: $opp(\Delta GAI) = opp(IHCB)$. Gevraagd is hoe dit geometrisch te doen.



Figuur 1



Figuur 2

Zie figuur 2. Pas vierhoek $ABCD$ aan naar ΔADM met dezelfde oppervlakte. [1]

Trek dan een lijn door A evenwijdig aan BC . Dat geeft AK .

Trek ook een lijn door M evenwijdig aan BC . Dat geeft punt L .

Verleng nu LM met MO : $|MO| = |AK|$.

Met de standaardconstructie is te vinden $|MN|$ en die is de middelevenredige van $|MO|$ en $|ML|$.

Maak nu: $|GH| = |MN|$. [2]

Volgens Q80 geldt dan: $opp(GHKA) = opp(\Delta KAM)$.

En dan ook: $opp(GHKA) = opp(ABCK)$.

En er volgt:

$$opp(\Delta DGH) = opp(\Delta DAK) + opp(GHKA) = opp(\Delta DAK) + opp(ABCK) = opp(ABCD).$$

En dus geldt ook: $opp(\Delta GAI) = opp(IHCB)$. Zoals gevraagd.

[In HGQ] Dit zou men nog op andere manieren kunnen doen zoals in Q88 geleerd is.

Opmerkingen:

[1] Dit is een standaardconstructie ondertussen maar wordt in HGQ toch weer beschreven.

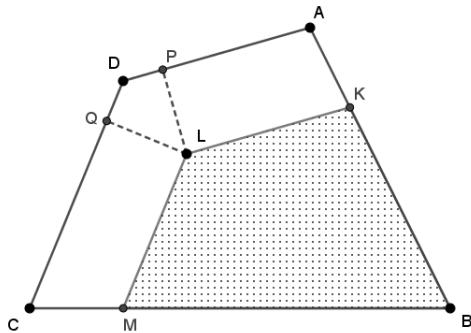
[2] Voor punt G geldt: $|DG| : |DA| = |AK| : |GH| = |AK| : |MN|$.

En daarmee is DG te construeren en vervolgens lijnstuk GH .

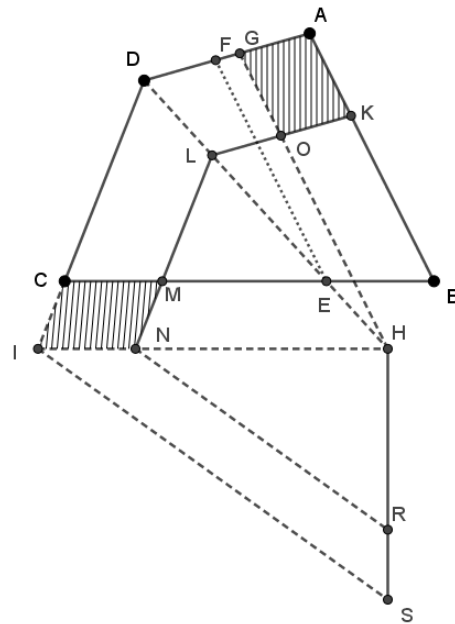
Q95 Vierhoek in stukken delen 6

Zie figuur 1. Een willekeurige vierhoek $ABCD$ wil men geometrisch verdeeld hebben in twee stukken, gelijk van oppervlakte, zodat de deellijn $K - L - M$ evenwijdig loopt aan $A - D - C$ én de afstanden $|PL|$ en $|QL|$ gelijk zijn. Dus de stukken $BKLM$ en $ADCMLK$ zijn elk de helft van $ABCD$.

Gevraagd: $|AK|$, $|CM|$.



Figuur 1



Figuur 2

De bissectrice van hoek ADC snijdt BC in punt E . Zie verder figuur 2.

De lijn EF is evenwijdig aan AB gemaakt.

Verdeel nu lijnstuk AF met punt G zodanig dat geldt: $|AG| : |GF| = |CD| : |DF|$. [1]

Verleng DC tot punt I zodat $|CI| = |AG|$.

Trek nu door G een lijn evenwijdig aan AB . Die snijdt de bissectrice in punt H . [2]

Dan is vierhoek $GHID$ gelijkvormig met vierhoek $FECD$. [3]

Neem $p^2 = opp(GHID)$ en $q^2 = \frac{1}{2} opp(ABCD)$. En dan: $r^2 = p^2 - q^2$. (*) [4]

De lijnstukken p en r zijn uitgezet vanuit punt H te weten $|HS|$ en $|HR|$.

Trek nu lijn RN evenwijdig aan lijn IS . Dan volgt: $|HI| : |HN| = |HS| : |HR|$.

Trek dan NL evenwijdig aan CD en daarna LK evenwijdig aan AD .

Dan volgt: $|HS|^2 - |HR|^2 = opp(GHID) - opp(OLNH) = \frac{1}{2} opp(ABCD)$. Zie (*)

Maar dit verschil is ook $opp(OGDINLO)$, zie in de figuur.

Omdat DL op de bissectrice ligt volgt dus dat L even ver van AD als van CD ligt. [5]

Bijgevolg hebben de parallelogrammen $CINM$ en $AGOK$ dezelfde hoogte én zij hebben dezelfde basis want $|CI| = |AG|$. Dus: $opp(CINM) = opp(AGOK)$.

Er volgt: $opp(OGDINLO) = opp(ADCMLK) = \frac{1}{2} opp(ABCD)$.

Daarmee zijn dus $|AK|$ en $|CM|$ gevonden d.w.z. geconstrueerd. [6]

Opmerkingen:

- [1] Dit is een standaardconstructie en niet vermeld in HGQ.
- [2] Hoe punt H is gevonden staat niet in HGQ maar volgt uit de figuur.
- [3] Bijvoorbeeld door een puntvermenigvuldiging vanuit D uit te voeren.
- [4] In HGQ wordt niet gemeld hoe die lengtes p en q gevonden worden ofwel hoe die uit de gegeven figuur 2 te construeren zijn. Dat dat kan is zeker maar de kwadratuur van een vierhoek is blijkbaar een bekend veronderstelde constructie. Zie hieronder.
- [5] Dit is niet meer ingetekend in figuur 2 en zie daarvoor figuur 1.
- [6] In HGQ staat '... dat LP ghelijck zy LQ , het welck zijn de lengten der linien AK ende CM ...'. Dit klopt dus niet.

Kwadratuur van een vierhoek, een methode:

Zie figuur 3. Eerst van vierhoek naar driehoek: $opp(ABCD) = opp(\triangle ABE)$.

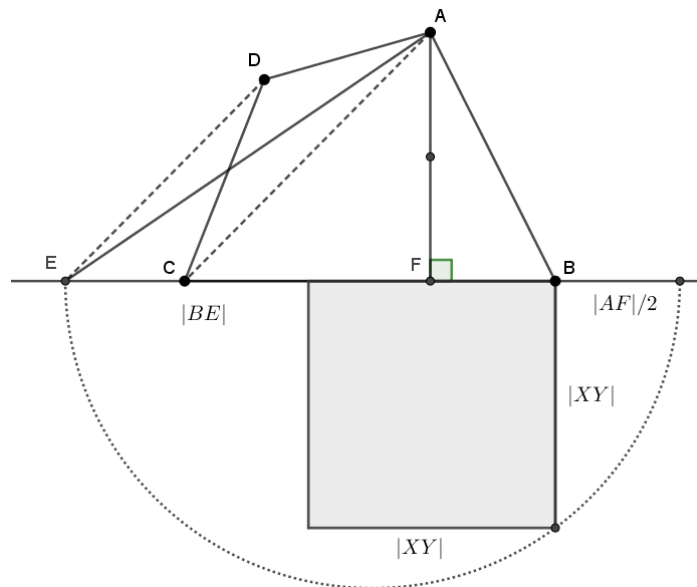
Dan in de driehoek een hoogtelijn: $|AF|$.

Er geldt nu: $opp(\triangle ABE) = \frac{1}{2} |AF| * |BE|$.

En dit moet gelijk zijn aan de oppervlakte van een vierkant: $|XY|^2$.

Dus: $|XY|$ is de middelevenredige van $\frac{1}{2} |AF|$ en $|BE|$.

$|XY|$ is dus de zijde van het gevraagde vierkant.

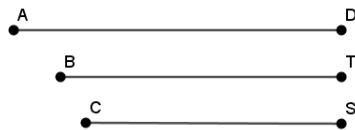


Figuur 3

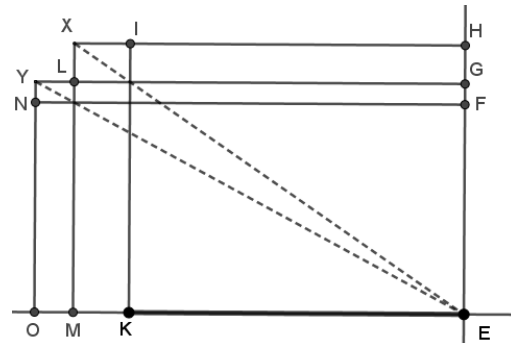
Q96 Driehoek middels hoogtelijnen

Zie figuur 1. Gegeven zijn drie lijnstukken AD , BT en CS die de hoogtelijnen zijn van een onbekende driehoek (ABC). [1]

Gevraagd is geometrisch te bepalen hoe lang de zijden van die driehoek zijn.



Figuur 1



Figuur 2

Zie figuur 2. Kies een lijnstuk van willekeurige lengte, "by exempel neme ick" $|EK|$.

Maak $|EH| = |AD|$ en dan rechthoek $EHIK$.

Maak $|EG| = |BT|$ en dan rechthoek $GLME$, in oppervlakte even groot als $EHIK$. [2]

Maak $|EF| = |CS|$ en dan rechthoek $FNOE$, in oppervlakte even groot als $EHIK$.

Merk nu op: $|EK| * |EH| = opp(EHIK)$ en $|AD| * |BC| = 2 * opp(\Delta ABC)$.

Dus: $|EK| : |BC| = opp(EHIK) : opp(\Delta ABC)$.

Op dezelfde wijze: $|EM| : |AC| = |EO| : |AB| = opp(EHIK) : 2 * opp(\Delta ABC)$.

Maak nu een driehoek met zijden

$|EK|$, $|EM|$, $|EO|$. Dat is ΔPQR : zie figuur 3. [3]

De hoogtelijn uit Q is QD .

Pas daarop af $|AD|$ als grootste hoogtelijn.

Die 'valt' op de kortste zijde $|PR| = |EK|$.

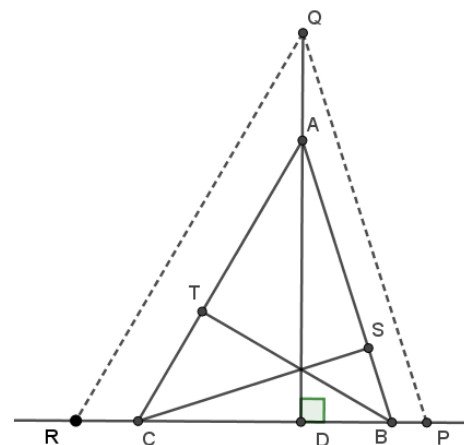
In de figuur te zien:

$|RQ| = |EM|$ en $|PQ| = |EO|$.

Trek nu door A lijnen evenwijdig aan PQ en RQ .

Die lijnen snijden PR in de punten B en C .

De gevraagde driehoek ΔABC is gevonden met de hoogtelijnen $|AD|$, $|BT|$, $|CS|$.



Figuur 3

Opmerkingen:

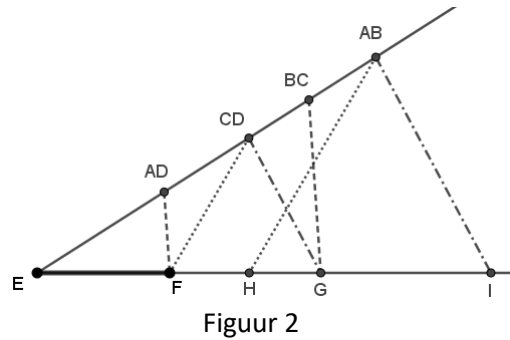
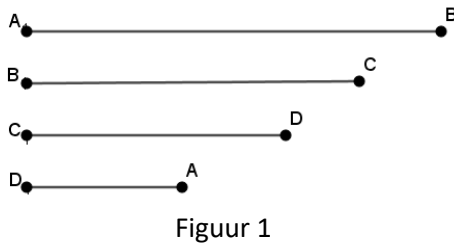
[1] In HGQ worden de hoogtelijnen aangeduid met AB , BC , CD . Dat is verwarrend want in de oplossings-tekening noemt Cardinael de driehoek gewoon ΔABC . Daarom is in deze tekst de notatie van de oplossingstekening aangehouden en het verhaal is daarop aangepast.

[2] Gebruik diagonaal EX en EY om te zien dat de rechthoeken gelijke oppervlakte hebben.

[3] In HGQ staat hier dat dat kan door propositie 22, boek I Euclides. Die stelt dat die constructie kan mits de som van twee zijden groter is dan de derde zijde.

Q97 Koordenvierhoek

Zie figuur 1. Er zijn vier lengtes gegeven: $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|$, zijnde van afnemende lengte. Daarmee is een koordenvierhoek $ABCD$ in een cirkel te maken. [1]
 Gevraagd is de diameter van die cirkel.



Om dit te doen neem 'na uw begheeren' een zeker lijnstuk EF . Zie figuur 2. Als het kleinste gegeven lijnstuk $|AD|$ nu lijnstuk $|EF|$ geeft, dan zal $|BC|$ een lijnstuk $|EG|$ geven.

Ofwel: $|AD| : |EF| = |BC| : |EG|$. Dus: $|EG| = \frac{|BC|}{|AD|} * |EF|$.

Er volgt ook: $|CD| : |EF| = |AB| : |EH|$ en $|CD| : |EG| = |AB| : |EI|$.

Maak nu twee lijnstukken: $|FI| = |EI| + |EF|$ en $|GH| = |EG| + |EH|$. [2]

Er is nu een koordenvierhoek te maken met als diagonalen $|FI|$ en $|GH|$. [3]

Nu geldt voor deze laatste koordenvierhoek:

$|GH| * |FI| = \text{som producten overstaande zijden}$. [4]

Maak nu eerst een rechthoek met zijden $|GH|$ en $|FI|$ en dan een vierkant met dezelfde oppervlakte.

Er volgt: $|GH| * |FI| = \text{opp}(KLMN)$. [5]

Zie figuur 3.

Ook geldt voor (koorden)vierhoek $ABCD$:

$|AC| * |BD| = |AD| * |BC| + |AB| * |CD|$.

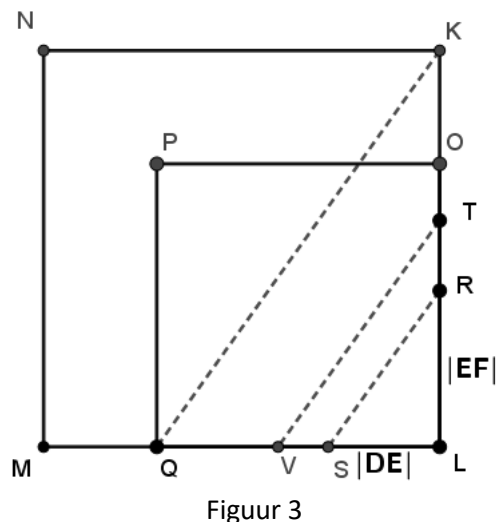
Het linkerproduct is dus de som van oppervlaktes van twee rechthoeken.

Maak dan weer eerst die rechthoeken en dan daarmee even grote vierkanten.

De som is de oppervlakte van een vierkant. [6]

Zie de figuur:

$|AC| * |BD| = \text{opp}(OPQL)$.



En zoals in Q53 en Q68 geleerd zijn nu verhoudingen te gebruiken.

Er volgt: $|LK| : |LQ| = |LR| : |LS|$. En met $|LR| = |EF|$ volgt: $|LS| = |DE|$

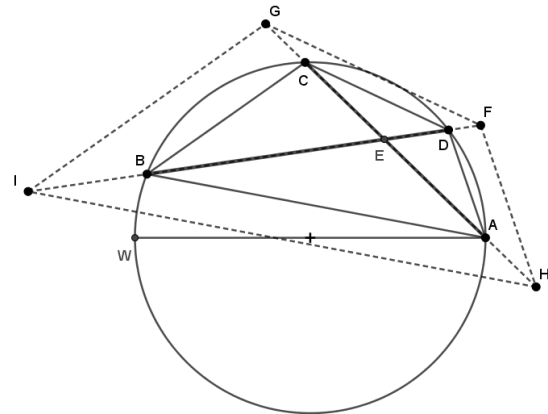
En ook met $|LT| = |EG|$ volgt $|LV| = |CE|$. E is het snijpunt van de diagonalen.

Dus zijn gevonden $|CE|$ en $|DE|$ en die maken met $|CD|$ de driehoek DEC .

Zie nu figuur 4.

$\triangle DEA, \triangle AEB, \triangle BEC$ zijn dan ook bekend en daarmee vierhoek $ABCD$.

En met propositie 25, boek III Euclides [hoe bij gegeven segment de cirkel te maken] is dan het centrum en de diameter van de cirkel bekend.



Figuur 4

Opmerkingen:

- [1] In HGQ: ‘... ende dat het selve vierhoeck in een cirkel staende dan met alle vier hoecken even den cirkel aanroert.’ De kwestie vraagt bijna drie pagina’s in het boek.
- [2] Dit zijn **andere** lijnstukken dan in figuur 2. Verwarrend.
- [3] Want: $|EF| * |EI| = |EG| * |EH| = \frac{|AB|*|BC|}{|CD|*|AD|} * |EF|^2$. En dit stelt de macht van E t.o.v. een cirkel voor en blijkbaar de cirkel door de punten F, G, I, H . In HGQ een iets ander betoog.
- [4] De stelling van Ptolemeus. Cardinael noemt die nergens expliciet in deze kwestie.
- [5] De zijde van zo’n vierkant is de middelevenredige van de rechthoekszijden.
- [6] Dat gaat middels Pythagoras dus met een rechthoekige driehoek.

Met enige trigonometrie en wat algemener.

Noem de zijden $|AB| = a, |BC| = b, |CA| = c, |DA| = d$. Geef een ander lijnstuk lengte 1 (*).

De zijden hebben verschillende lengtes dus $ABCD$ is geen rechthoek. Er is zeker één hoek scherp.

We veronderstellen dat hoek $BAD = \alpha$ scherp is.

Voor diagonaal $|BD|$ van de koordenvierhoek geldt:

$$|BD|^2 = a^2 + d^2 - 2ad * \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - 2bc * \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$\text{Er volgt: } \cos(\alpha) = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2 * (ad + bd)}.$$

Kwadraten, producten, verschillen, etc. van lengtes zijn te construeren met hulp van (*).

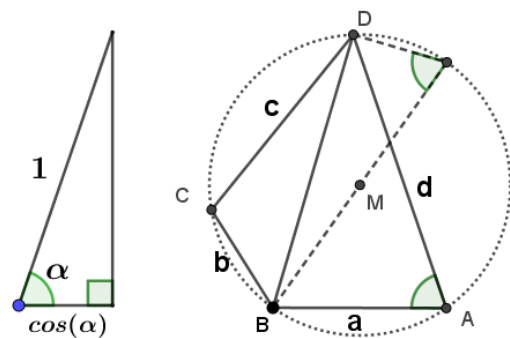
Dus construeerbaar is $\cos(\alpha)$ en daarmee α .

Zie figuur 5.

Met a, α en d is dan $\triangle BAD$ te construeren en de omgeschreven cirkel hiervan is de gevraagde cirkel. Punt C is vervolgens eenvoudig te vinden.

Voor de cirkeldiameter $2r$ geldt:

$$\sin(\alpha) = \frac{|BD|}{2r}.$$



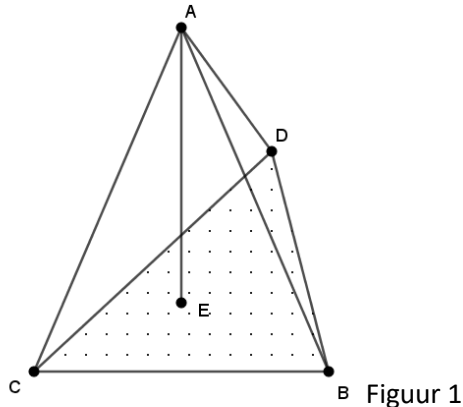
Figuur 5

Q98 Inhoud piramide 1

Zie figuur 1. De piramide $ABCD$ heeft als basis [grondvlak] een onregelmatige driehoek BCD . Er geldt: $|BC| = 13$, $|CD| = 14$, $|BD| = 15$.

En dan B tot de spits A : $|BA| = 14$. Verder geldt: $|CA| = 15$, $|DA| = 13$. [1]

Gevraagd: de inhoud van deze piramide. [2]



Vind eerst de lengte van de hoogtelijn AE . Met Q76 volgt: $|AE| = \sqrt{123\frac{3}{4}}$.

Neem hiervan het $\frac{1}{3}$ deel en dat is $\sqrt{13\frac{3}{4}}$.

Voor het grondvlak geldt: $opp(\triangle BCD) = 84$.

Voor de piramide volgt dan:

$$Inh(ABCD) = \sqrt{13\frac{3}{4}} * 84 = \sqrt{97020} \text{ en dat is "naer by" } 311\frac{1}{2}. [3][4]$$

Opmerking:

[1] Fout in HGQ: daar staat: $|CA| = 13$, $|DA| = 15$.

Die lengtes geven een grotere waarde voor de hoogtelijn namelijk $\sqrt{129\frac{11}{36}}$.

[2] In HGQ staat 'hoeveel vierkante cubique voeten ...'. Dat de lijnstukken zelf in voeten zijn, staat nergens maar lijkt dan logisch.

[3] Dit is de formule zoals genoemd in de gevolgtrekking na propositie 7, boek XII Euclides.

$$Inh(\text{piramide } A.BCD) = \frac{1}{3} * h * opp(\triangle BCD).$$

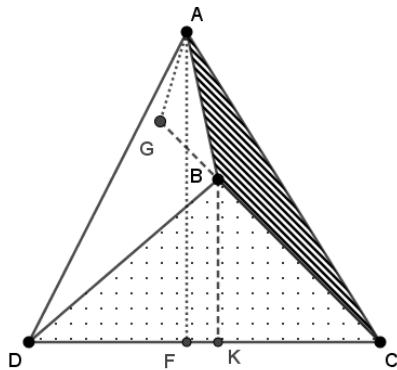
$$[4] \sqrt{97020} = 311,480 \dots$$

Q99 Inhoud piramide 2

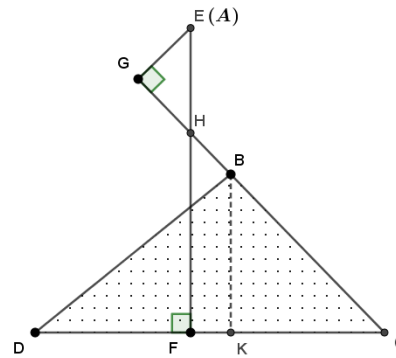
Zie figuur 1. De piramide $ABCD$ heeft als basis [grondvlak] een onregelmatige driehoek BCD . Er geldt: $|BC| = 8\frac{1}{2}$, $|CD| = 13$, $|BD| = \sqrt{101\frac{1}{4}}$.

En dan C tot de spits A : $|CA| = 25$. Verder geldt: $|BA| = \sqrt{445\frac{1}{4}}$, $|DA| = \sqrt{596}$. [1]

Gevraagd: de inhoud van deze piramide.



Figuur 1



Figuur 2

Zoek eerst waar de loodlijn in $\triangle ACD$ uit A valt. Dat geeft AF .

En met Q1 volgt dan: $|DF| = 5\frac{5}{13}$, $|CF| = 7\frac{8}{13}$.

De loodlijn uit A bij $\triangle ACB$ valt op het verlengde van BC : punt G .

En met Q2 volgt dan: $|BG| = 6\frac{11}{34}$, $|CG| = 14\frac{14}{17}$.

Zie nu verder figuur 2. [2]

Trek de lijn vanuit F loodrecht op CD in het grondvlak naar punt E , het voetpunt van de loodlijn uit A op dat grondvlak.

Lijn FE snijdt CG in punt H . De lengte $|CH|$ willen wij vinden.

Met Q1 en Pythagoras is te vinden: $|BK| = 6\frac{15}{26}$, $|CK| = 5\frac{5}{13}$. BK is een hoogtelijn.

Nu volgt: $|CK| : |CB| = |CF| : |CH|$. Dus: $|CH| = 12\frac{3}{140}$.

Gevolg: $|HG| = |CG| - |CH| = 14\frac{14}{17} - 12\frac{3}{140} = 2\frac{1909}{2380}$.

En ook: $|KB| : |CK| = |HG| : |EG|$. Dus: $|EG| = 2\frac{5}{17}$.

$\triangle ABG$ is rechthoekig in G en $|AB|$ en $|BG|$ zijn bekend.

Met Pythagoras volgt dan: $|AG| = \sqrt{445\frac{1}{4} - \left(6\frac{11}{34}\right)^2} = \sqrt{405\frac{76}{289}}$.

En er volgt nu: $|AE| = \sqrt{|AG|^2 - |EG|^2} = 20$. $Opp(\triangle BCD) = 42\frac{3}{4}$.

En dan zoals in Q98 geleerd is: $Inh(A.BCD) = \frac{1}{3} * 20 * 42\frac{3}{4} = 285$.

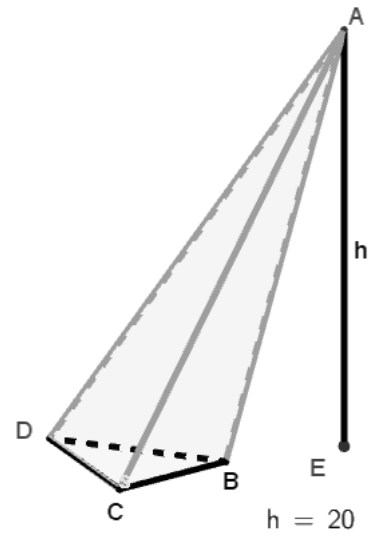
Dus deze overhellende piramide heeft een inhoud van 285 'cubique' voeten.

Opmerkingen:

[1] Deze waarden zorgen er voor dat E , het voetpunt van de loodlijn uit A , buiten $\triangle BCD$ ligt. Zie figuur 3 hiernaast gemaakt in *GeoGebra* 3D.

[2] Figuur 2 is een bovenaanzicht. Punt A ligt dus eigenlijk 'op' punt E . In HGQ is de tekening anders.

Alle berekeningen zijn met hulp van *Wolfram Alpha* gecontroleerd en de waardering voor het handwerk van Cardinael is enkel groter geworden.

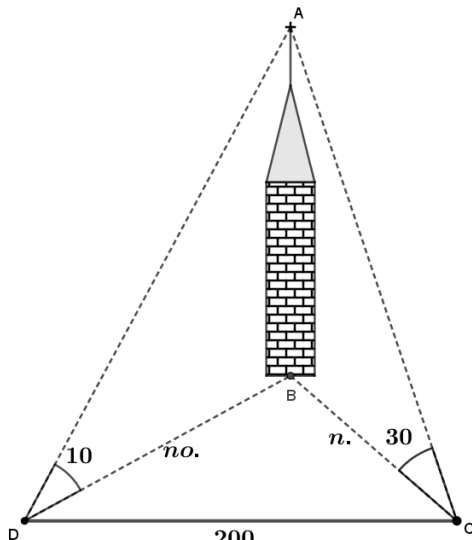


Figuur 3

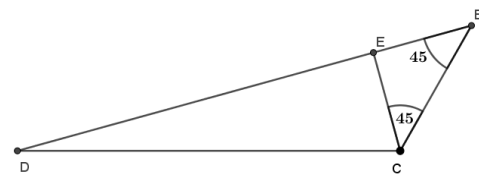
Q100 Hoogte van een toren 4

Zie figuur 1 [1]. Staande op een vlak gebied in punt C noordelijk van een toren is de top daarvan te zien onder 30 graden boven de horizon. Van daaraf gaand naar een ander punt D (met $|CD| = 200$) is de top te zien onder een hoek van 10 graden boven de horizon. Dit punt ligt precies noord-oostelijk van de toren.

Gevraagd: de hoogte van de toren en de afstanden van C en D tot de toren dus $|BC|$ en $|BD|$.



Figuur 1



Figuur 2

Eerst de tangens van hoek BAC , die 60° is: $1,73205 \dots$ [2], dus $|BC| = 173205$. [3]

Dan: $\tan(\sphericalangle BAD) = \tan(80^\circ) = 5,67128 \dots$ dus $|BD| = 567128$.

Van $\triangle DBC$ is hoek DBC bekend: 45° , want Noord en Noord-Oost verschillen 45° .

En de zijden BC en BD zijn ons bekend in 'kleine delen' als boven.

Nu moet uitgezocht worden hoeveel kleine delen dan CD zal zijn.

Zie nu figuur 2. $\sin(45^\circ) = 0,70711$, dus $|EC| = 70711$.

Nu volgt: $|EB| = |BC| * \sin(45^\circ) = \frac{173205}{100000} * 70711 = 122475$. [4]

Dan ook: $|EC| = 122475$. [5]

En er volgt: $|ED| = |BD| - |EB| = 444653$.

Dus: $|CD| = \sqrt{|ED|^2 + |EC|^2} = 461212$. [6]

Nu is dus $|CD|$ bekend [uitgedrukt] in kleine delen [als boven bedoeld].

Er volgt:

Als $|CD|$ dus in kleine delen bekend is, maar in werkelijkheid 200 voeten is, dan volgt voor $|AB|$, die in kleine delen dus 100000 is, voor de echte lengte 'naer by' $43 \frac{3}{8}$ voeten. [7]

Dat is de hoogte van de toren.

Vervolgens:

Als $|AB|$ in kleine delen dus 100000 is maar in werkelijkheid $43 \frac{3}{8}$, dan zullen $|BD|$ en $|BC|$, die in kleine delen zijn 567128 en 173205 , in werkelijkheid zijn: 246 en 75 voeten 'naer by'. [8]

Anders:

Als $\sin(30^\circ) = 50000 AB$ en $\sin(10^\circ) = 17365 AB$ (*), dan zal volgen: $\sin(60^\circ) = 86603 BC$. [9]

Dan volgt: $|BC| = 30077$.

En nu: als $|AB|$ dus 50000 kleine delen is, dan is $|BC| = 30077$ en $|BD| = 98481$.

Dit laatste getal is dan $\sin(80^\circ)$.

En met $\sin(45^\circ) = 70711 EC$ volgt dan: $|EC| = 21267$.

Dus: $|DE| = |BD| - |EC| = 77214$.

Dan volgt: $|CD| = \sqrt{|DE|^2 + |CE|^2} = 80089$. [10]

Nu is $|CD|$ bekend in kleine delen en dat is gelijk aan 200 voeten.

Daarom: als 80089 dus gelijk 200 voeten is, dan is 17365, zie (*) dus ongeveer $43\frac{3}{8}$ voeten, zoals boven. [11]

En verder volgt: 98481 geeft dan $|BD| = 246$ voeten en 30077 geeft dan $|BC| = 75$ voeten.

Opmerkingen:

[1] In HGQ staat een mooi getekende toren.

[2] In HGQ staat voor die tangens 173205. Goniometrische verhoudingen zijn rechthoekszijden in een driehoek met hypotenusa 100000. [ref. Sitters, 2008]

[3] Volgens schrijvers dezes kan hier gelezen worden: $|BC|$ is zoveel keer een klein deel en in dit geval het 100000-e deel van $|AB|$. Ofwel: $|AB| = 100000$. [ref. Sitters, 2008]

[4] Een afronding van 122474,987 ...

[5] Deze tussenvoeging wordt gemist in HGQ.

[6] Een afronding van 461211,899 ... In HGQ is dit afgerond naar 461213. Fout of...?

[7] De waarde is 43,364 ... en dat is bijna 43,375.

[8] Afrondingen van 245,991 ... en 75,127 ... en doorrekening met de 'bijna-waarde' bij [7].

[9] Notatie zoals die in HGQ staat.

Bedoeld is: met $|AD| = 100000$ volgt $\sin(10^\circ) = 17365 = |AB|$. Verder: $\sin(30^\circ) = 50000$.

[10] Afronding van 80089,244 ... In HGQ staat 80080.

[11] Ook nu is de waarde 43,364 ... gerekend met 80089.

Met enige trigonometrie:

Noem $|AB| = h$. Dan volgt met de cos-regel in $\triangle BCD$:

$$|CD|^2 = |BC|^2 + |BD|^2 - 2|BC||BD|\cos(45^\circ).$$

$$200^2 = h^2(\tan^2(60^\circ) + \tan^2(80^\circ) - \tan(60^\circ)\tan(80^\circ) * \sqrt{2}).$$

$$h = 43,36396 \dots$$

Toegift

'Volght noch een Arithmetische Questie, om deze hier mede te besluynen, die ick seer konstelijckk sonder Cossische ghetalen maecke'.

Een koopman koopt rechthoekige lakens, van soort A zoveel als elk stuk kost. Elk stuk kost A pond [1].

En van soort B koopt hij zoveel als elk stuk kost. Elk stuk kost B pond.

Van soort C koopt hij zoveel als van A en B samen in ponden kosten. Een stuk van soort C kost zoveel als A en B samen kosten. De stukken van soort C kosten samen 715 ponden.

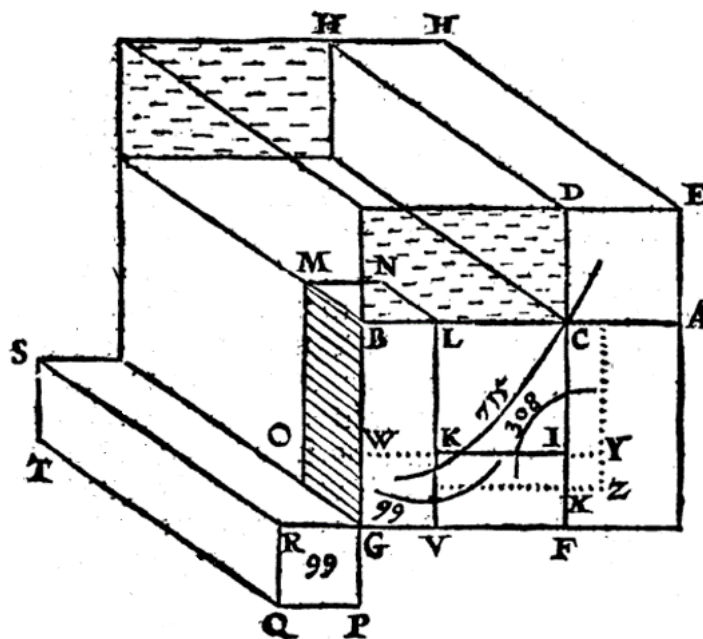
Tenslotte: van soort D heeft hij zoveel stukken gekocht als, uitgedrukt in geld, hij meer heeft betaald voor soort B dan voor soort A . Een stuk D kost zoveel als het verschil in prijs van B en A .

De kosten voor de stukken van soort D belopen 99 pond.

Gevraagd: Hoeveel stukken van elk soort heeft hij gekocht?

Maakt van A 4, B 7, C 65 en D 33 stukken. [2]

Cardinael pakt dit meetkundig aan en gebruikt figuur 1, genomen uit HGQ.



Figuur 1

Trek eerst een lijn AB en verdeel die door punt C . $|AC|$ stelt dan de hoeveelheid lakens van soort A voor en $|BC|$ het aantal lakens van soort B . [3]

Vierkant $ACDE$ stelt dan het totaal aantal ponden betaald voor lakens A en vierkant $BCFG$ stelt het totaal aantal ponden betaald voor lakens B .

Samen zijn deze twee vierkanten zoveel als er lakens C gekocht zijn.

Zet nu op deze twee vierkanten een lichaam [blok], een met in hoogte en breedte als vierkant $ACDE$ en in lengte $|EH|$ waarvoor geldt: $|EH| = |AB|$, de andere met in hoogte en breedte als vierkant $BCFG$ met in lengte ook $|EH|$.

In inhoud van deze twee lichamen is samen 715 en dat is de prijs die voor lakens C in totaal betaald is. De prijs van een laken C wordt voorgesteld door $|AB|$. (*)

Vierkant $CIKL$ is even groot als vierkant $ACDE$.

Dan stelt [de oppervlakte van het gnomon] $IFGBLK$ het aantal lakens D voor.

En $|LB|$ stelt voor de prijs van een laken D , het verschil in meerprijs van laken B met de prijs van laken A , ofwel zoveel als $|BC|$ meer is dan $|AC|$.

Maak nu een lichaam op het gnomon $IFGBLK$ met lengte $|LN| = |BM| = |GO| = |BL|$.

Rechthoek $BLNM$ is dus een vierkant.

Dit lichaam heeft een inhoud van 99 en dat is de prijs die voor de lakens D betaald is.

Maak nu op vierkant $PQRG$, dat even groot is als $BLNM$, een lichaam [blok] met lengte $|TQ| = |EH|$. De inhoud hiervan is ook 99 omdat $|BG| + |FV| = |TQ|$ en $opp(PQRG) = opp(BLNM)$. (*)

Denk de lengtes van de lichamen gemaakt bij (*) nu weg, want die zijn even groot, dan resteert: [4] $opp(ACDE) + opp(BCFG) = 715$ en $opp(PQRG) = 99$.

Hun verschil, 616, is de oppervlakte van vier veelhoeken te weten, $ACDE$, $CIKL$, $IKVF$ en $LKWB$. Gevolg: $opp(CIKL) + (IKVF) = 308$.

Deel IF in twee gelijke delen met punt X en omdat $|FI| = |GP|$ volgt: $|IF| = \sqrt{99}$.

$$\text{Dus: } |IX| = \frac{1}{2}\sqrt{99} = \sqrt{24\frac{3}{4}}.$$

$$\text{Met } |IY| = |IX| \text{ volgt: } opp(IXZY) = 24\frac{3}{4}.$$

$$\text{Er volgt: } |CX|^2 = |YK|^2 = 308 + 24\frac{3}{4} = 332\frac{3}{4}. \text{ [Zie de figuur!]} \text{ Dus: } |CX| = \sqrt{332\frac{3}{4}}.$$

$$\text{Er volgt: } |CI| = |CX| - |IX| = \sqrt{176}. \text{ Dit is ook } |AC|.$$

$$\text{En: } |BC| = |CI| + |IF| = \sqrt{176} + \sqrt{99} = \sqrt{539}.$$

$$\text{Dus: } |AB| = \sqrt{176} + \sqrt{539} = \sqrt{1331}. \text{ Ofwel: } |AB|^2 = 1331.$$

(**) Ga nu weer terug naar de lichamen met de lengte $|EH|$. Deze lengte was ook $|AB|$.

Blijkbaar heeft het lichaam met hoogte $|EH|$ en breedte en lengte van $|AB|$, dus een inhoud van 1331. Gevolg: $|AB| = \sqrt[3]{1331} = 11$. Dit is dus ook $|EH|$.

$$\text{Er geldt: } inh(\text{blok } H.ACDE) = |EH| * |AC|^2 = 176 = 11 * |AC|^2. \text{ Dus: } |AC| = 4.$$

Zoveel lakens zijn dus van soort A gekocht.

$$|BC| = |AB| - |AC| = 7. \text{ Zoveel lakens zijn van soort } B \text{ gekocht.}$$

$$7^2 + 4^2 = 65 \text{ en dit is het aantal lakens van soort } C.$$

$$7^2 - 4^2 = 33 \text{ en dit is het aantal lakens van soort } D.$$

En zo is dus zeer kunstig gevonden hoeveel lakens hij [de koopman] van elk soort gekocht heeft.

De prijzen zijn ook bekend: A 4 pond, B 7 pond, C 11 pond, D 3 pond.

EYNDE

Opmerkingen:

[1] Hierachter staat in HGQ 'vlaems': een munt- of wisseleenheid?

[2] Opmerkelijk: in HGQ staat dit meteen achter de vraagstelling.

[3] Verwarrend: A staat voor een type laken, de prijs van dat type én een hoekpunt in de figuur.

Dat $B > A$ is verwerkt in de figuur: $|BC| > |AC|$.

Vanaf hier wordt 'laken van soort X ' genoteerd als 'laken X ' door schrijver dezes.

[4] De volgende waarden zijn dus eigenlijk 'maal de lengte'. Dat moet in gedachten gehouden worden tot regel (**).

Meer getalsmatig zou het zo kunnen gaan:

Noem de prijzen naar de lakensoort, zoals Cardinael ook doet, dus A, B, C, D .

Noem de aantallen lakens van soort ... : n_A, n_B, n_C, n_D . Dit zijn natuurlijke getallen!

Dan is gegeven:

$$n_c = A^2 + B^2, C = A + B, n_c * C = 715.$$

$$n_D = B^2 - A^2, D = B - A, n_D * D = 99.$$

Dus $B > A$ en de prijzen zijn ook natuurlijke getallen.

Na substitueren volgt:

$$715 = (A + B)(A^2 + B^2) = A^3 + AB^2 + BA^2 + B^3 \quad (1)$$

$$99 = (B - A)(B^2 - A^2) = A^3 - AB^2 - BA^2 + B^3 \quad (2)$$

Tel (1) en (2) bij elkaar en er volgt: $A^3 + B^3 = 407$.

Met $B > A$ voldoet hier maar één oplossing binnen de natuurlijke getallen: $A = 4$ en $B = 7$.

De rest volgt hiermee...

Eventueel is eerst het volgende te doen.

Trek (2) van (1) af om te krijgen:

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3(A^2B + AB^2) = 407 + 924 = 1331.$$

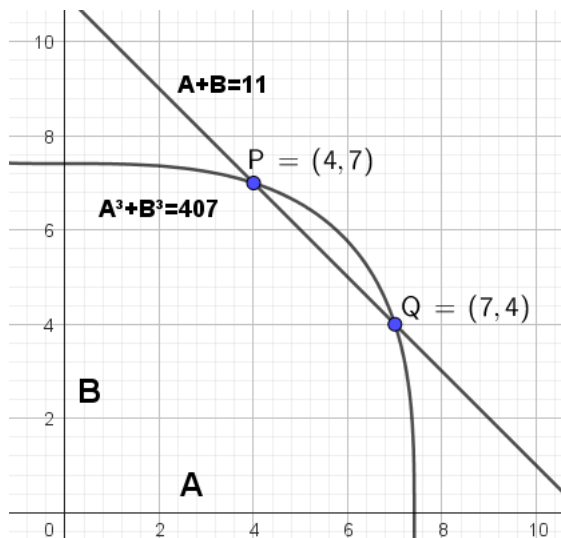
Dus:

$$A + B = 11.$$

En hieraan voldoen met $B > A$:

$$(A, B) = (1,10), (2,9), (3,8), (4,7), (5,6).$$

Een test op $A^3 + B^3 = 407$ geeft de enige oplossing. Zie ook de figuur.



Nawoord

Hoewel de bewijzen in HGQ vaak fraai zijn en met bijzondere invallen opgelost, waar Cardinael zichtbaar trots op is, zou een aanpak met de al bekende methoden uit de analytische meetkunde soms eenvoudiger zijn geweest. Toch is dat in HGQ nergens gedaan. Waarom niet?

Volgens onderzoekers omdat Cardinael de nieuwe methode niet vertrouwde. Deze methode had in zijn ogen geen goed fundament terwijl de klassieke meetkundige methoden die wel hadden namelijk in de Elementen van Euclides. In de 'voorreden' sluit hij daarom 'Cossische ghetalen' uit.

De twijfel over het fundament past in het meetkundig denken in die tijd. Een getal staat voor de lengte van een lijnstuk, een kwadraat staat voor de oppervlakte van een vierkant en een derde macht voor de inhoud van een kubus. Welke betekenis heeft dan een vergelijking als: $x^3 = x^2 + 4$?

Over de naam 'Cossisch':

"Men leerde [rond 1600] dat het handig was om bij een probleem over getallen het gevraagde getal een naam te geven, meestal een variant van 'ding', in Italië 'cosa', in Duitsland verbasterd tot 'Coss'. Algebra heette daar, en ook in Nederland, nog lang de 'Cossische Kunst'."

Uit: Keestra M. e.a. (2006), *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde*. Uitg: Nieuwezijds.

Zie voor meer achtergrondinformatie:

<https://www.math.uu.nl/wiskonst/cardinael.html>

Literatuur, ook genoemd in Wortels van Wiskunde in Euclides 93, 2:

– Maanen, J. van (2003). Cardinael in de geschiedenis van de wiskunde. Nieuw Archief voor Wiskunde, serie 5, deel 4, nummer 1.

– Sitters, M.H. (2008). Sybrandt Hansz Cardinael, 1578-1647 Rekenmeester en wiskundige - Zijn leven en zijn werk. Hilversum: Uitgeverij Verloren.

- Een bibliografie van Cardinael:

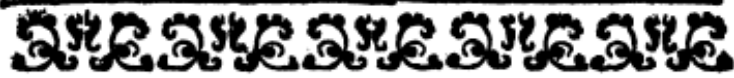
https://www.dbnl.org/tekst/_boe022200601_01/_boe022200601_01_0049.php

Over de auteur:

Fred Muijers was tot zijn pensioen docent aan de eerste- en tweedegraads lerarenopleiding wiskunde van de Hogeschool van Arnhem en Nijmegen.

Bijlage

Het voorwoord in HGQ...



V O O R R E D E N.



Onstlievende Leser, hier hebt ghy hondert Geometrische Vra-ghen, en daer by onderrechtin-ghen hoemen die solveren sal, eenighe met linien, ende sommi-ghen met (doch alle sonder Cossische) ghe-talen, seer dienstigh allen den ghenen die haer inde conste der Geometrie begheeren te oeffenen; om dat inde selve verhandelt ende ghetraecteert werden de voornaemste stucken der selver conste, om allerleye me-tinghen seer constichlijck te doen, en on-bekende verborghen linien cortelijck ende behendelijck te vinden. Soo wy bevinden dat u. l. dit aenghenaem is, wy verhoppen (soo't Godt toelaet) hier nae wat meerder ende beter aenden dagh te brenghen.

Vaert ter wylen wel.

Sybrandt Hansz.